Hasznosságok

Hasznos összefüggések és még ami a függvénytáblából kimaradt

v2.180401

Szoldatics József
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
2012 / 2018

2018. április 1.

Tartalomjegyzék

1. Előszó **6**

2. Alkalmazott jelölések **7**
2.1. Halmazok . . . 7
2.2. Függvény . . . 7
2.3. Geometria . . . 7
2.4. Egyebek . . . 9

3. Algebra **10**
3.1. Azonosságok . . . 10
3.1.1. Másodfokú, két változó . . . 10
3.1.2. Másodfokú, több változó . . . 10
3.1.3. Harmadfokú, két változó . . . 11
3.1.4. Harmadfokú, több változó . . . 11
3.1.5. Magasabb fokú . . . 12
3.1.6. Binom, trinom, ... 12
3.2. Összegzések . . . 13
3.2.1. Hatványösszegek . . . 13
3.2.2. Vegyes egész összegek . . . 14
3.2.3. Vegyes tört összegek . . . 15
3.3. Szimmetrikus polinomok . . . 15
3.3.1. Két változó . . . 15
3.3.2. Három változó . . . 15
3.4. Egyenletek általános megoldása . . . 16
3.4.1. Viète formulák . . . 16
3.4.2. Egyenletek racionális gyökei . . . 16
3.4.3. Horner elrendezés . . . 17
3.5. Megoldó képletek . . . 17
3.5.1. Másodfokú egyenlet . . . 17
3.5.2. Harmadfokú egyenlet . . . 17
3.5.3. Negyedfokú egyenlet . . . 19
3.6. Speciális egyenletek . . . 20
3.6.1. Szimmetrikus egyenlet . . . 20
3.6.2. Antiszimmetrikus egyenlet . . . 20
3.7. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$ . . . 21
3.7.1. A megoldások szerkezete . . . 21
3.7.2. $x^2 - Dy^2 = k$ első megoldásai . . . 21
3.7.3. $x^2 - Dy^2 = 1$ első megoldásai . . . 21

4. Egyenlőtlenségek **22**
4.1. Nevezetes egyenlőtlenségek . . . 22
4.1.1. Bernoull-egyenlőtlenségek . . . 22
4.1.2. Carleman-egyenlőtlenség . . . 22
4.1.3. Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségek . . . 23
4.1.4. Csebisev-egyenlőtlenség . . . 23
4.1.5. EV-egyenlőtlenség (Equal Variable Theorem) . . . 23
4.1.6. Hilbert-egyenlőtlenség . . . 24
4.1.7. Hölder-egyenlőtlenségek . . . 24

4.1.8. Jensen-egyenlőtlenségek . . . 24
- Konkáv függvény . . . 24
- Konvex függvény . . . 24
4.1.9. Minkowski-egyenlőtlenség . . . 25
4.1.10. Muirhead-egyenlőtlenség . . . 25
4.1.11. Nesbitt-egyenlőtlenség . . . 25
4.1.12. Popoviciu-egyenlőtlenségek . . . 25
- Konkáv függvény . . . 25
- Konvex függvény . . . 25
4.1.13. Rendezési egyenlőtlenségek . . . 26
- Két sorozatra . . . 26
- Több sorozatra . . . 26
4.1.14. Schur-egyenlőtlenség . . . 26
4.1.15. Számtani-mértani egyenlőtlenség . . . 26
4.1.16. Számtani-mértani egyenlőtlenség, súlyozott forma . . . 26
4.1.17. Számtani-mértani egyenlőtlenség, család . . . 26
- Harmonikus közép . . . 26
- Mértani közép . . . 26
- Számtani közép . . . 26
- Négyzetes közép . . . 27
4.1.18. Számtani-mértani egyenlőtlenség, függvény alapon . . . 27
4.1.19. Young-egyenlőtlenség . . . 27
4.2. Megoldási technikák . . . 27
4.2.1. Ismert egyenlőtlenségek . . . 27
4.2.2. Algebrai helyettesítések . . . 28
4.2.3. Trigonometrikus helyettesítések . . . 28

5. Geometria **29**
5.1. Tételek . . . 29
5.1.1. Brahmagupta-tétel . . . 29
5.1.2. Bretschneider-tételek . . . 29
- Egy négyszög területe . . . 29
- Tetszőleges négyszögree . . . 30
5.1.3. Brianchon-tétel . . . 30
5.1.4. Ceva-tétel . . . 30
5.1.5. Ceva-tétel trigonometrikus alakja . . . 30
5.1.6. Desargues-tétel . . . 30
5.1.7. Descartes-tétel . . . 31
5.1.8. Euler-egyenes . . . 31
5.1.9. Feuerbach-kör . . . 31
5.1.10. Feuerbach-tétel . . . 31
5.1.11. Gergonne-pont . . . 32
5.1.12. "Kotangens-trükk" . . . 32
5.1.13. Menelaosz-tétel . . . 32
5.1.14. Morley-tétel . . . 32
5.1.15. Nagel-pont . . . 32
5.1.16. Pappos-tétel . . . 33
5.1.17. Pascal-tétel . . . 33
5.1.18. Pitagorasz-tétel, általánosítás . . . 33
5.1.19. Ptolemaiosz-tétel . . . 33
5.1.20. Reuschle-tétel . . . 33
5.1.21. Simson-(Wallace) egyenes . . . 34

5.1.22. Stewart-tétel . . . 34
5.1.23. Varignon-tétel . . . 34
5.1.24. "Névtelen" állítások . . . 34
5.2. Geometriai egyenlőtlenségek . . . 34
5.2.1. Erdős-Mordell-egyenlőtlenség . . . 34
5.2.2. Euler-gyenlőtlenség . . . 35
5.2.3. Háromszög egyenlőtlenség . . . 35
5.2.4. Mitrinovic-egyenlőtlenségg . . . 35
5.2.5. Padoa-egyenlőtlenség . . . 35
5.2.6. Ptolemaiosz-egyenlőtlenség . . . 35
5.2.7. Weitzenböck-egyenlőtlenség . . . 35
5.2.8. "Névtelen" egyenlőtlenségek . . . 36
5.3. Háromszög . . . 36
5.3.1. Háromszögekre vonatkozó összefüggések . . . 37
5.3.2. Háromszögek területképletei . . . 42
5.3.3. Háromszög nevezetes pontjainak távolsága . . . 43
5.4. Trigonometria . . . 44
5.4.1. Trigonometrikus összefüggések . . . 44
5.4.2. Szögek pontos trigonometrikus értékei . . . 47
5.4.3. Trigonometrikus értékek sorozata . . . 49
5.4.4. Trigonometrikus összegek . . . 50
5.5. Vektorok . . . 50
5.5.1. Háromszög egyenlőtlenségek . . . 50
5.5.2. Háromszög . . . 50
5.5.3. Négyszög . . . 51

6. Gráfelmélet 52
6.1. Gráf . . . 52
6.1.1. Csúcs . . . 52
6.1.2. Él . . . 52
6.1.3. Fok . . . 52
6.2. Alapfogalmak . . . 52
6.2.1. Bináris kódfa, döntési fa . . . 52
6.2.2. Egyszerű gráf . . . 52
6.2.3. Elsőfokú faktor . . . 53
6.2.4. Erősen összefüggő irányított gráf . . . 53
6.2.5. Euler-vonal . . . 53
6.2.6. Hamilton-út . . . 53
6.2.7. Hamilton-kör . . . 53
6.2.8. Hurokél . . . 53
6.2.9. Irányított gráf . . . 53
6.2.10. Izomorf gráfok . . . 53
6.2.11. Klikk . . . 53
6.2.12. Komplementer gráf . . . 53
6.2.13. Összefüggő gráf . . . 53
6.2.14. Páros gráf . . . 53
6.2.15. Súlyozott gráf . . . 54
6.2.16. Szomszédos csúcs . . . 54
6.2.17. Szomszédos él . . . 54
6.2.18. Teljes gráf . . . 54
6.2.19. Többszörös él . . . 54
6.2.20. Véges gráf . . . 54

6.2.21. Vonal . . . 54
6.2.22. Út . . . 54
6.3. Tételek . . . 54
6.3.1. Cayley tétel . . . 54
6.3.2. Erdős-Szekeres tétel . . . 54
6.3.3. Kőnig Dénes tétele . . . 54
6.3.4. Ramsey tétele . . . 55
6.3.5. Turán-tétel egyszerű formája . . . 55
6.4. ,,Névtelen" tételek, állítások . . . 55
6.5. Speciális gráfok . . . 56
6.5.1. Grötzsch gráf . . . 56
6.5.2. Petersen gráf . . . 56
6.5.3. Teljes gráf . . . 56
6.5.4. Teljes páros gráf . . . 56

7. Nevezetes számok 57
7.1. Konstansok . . . 57
7.1.1. Konstans: e $\approx$ 2,7182818... . . . 57
7.1.2. Konstans: $\phi \approx$ 1,61803398874... (aranymetszés) . . . 57
7.1.3. Konstans: $\pi \approx$ 3,1415926... . . . 58
7.2. Binomiális együtthatók . . . 59
7.2.1. Pascal háromszög . . . 59
7.2.2. Összefüggések . . . 59
7.3. Catalan számok . . . 60
7.3.1. Catalan háromszög . . . 60
7.3.2. Összefüggések . . . 60
7.4. Fibonacci számok . . . 61
7.4.1. Összefüggések . . . 61
7.5. Ramsey számok . . . 62
7.5.1. Két halmazra: $R\left(m;n\right)$ . . . 62
7.5.2. Értékek két halmazra . . . 62
7.5.3. Három halmazra: $R\left(m;n,p\right)$ . . . 62

8. Számelmélet 63
8.1. Oszthatósági szabályok . . . 63
8.1.1. Szokásos szabályok 2-től . . . 63
8.1.2. Nem szokásos szabályok 3-tól, az utolsó jegyekkel . . . 64
8.2. Osztási maradékok . . . 65
8.2.1. Négyzetszámok maradékai . . . 65
8.2.2. Köbszámok maradékai . . . 65
8.2.3. Negyedik hatványok maradékai . . . 65
8.3. Pitagoraszi számhármasok . . . 66
8.3.1. Általános megoldás . . . 66
8.3.2. Megoldások 20-ig . . . 66
8.4. Számelméleti függvények . . . 66
8.4.1. Euler féle $\varphi\left(n\right)$ . . . 66
8.4.2. Osztók összege $\sigma\left(n\right)$ . . . 67
8.4.3. Osztók száma $d\left(n\right)$ . . . 67
8.5. Számelméleti tételek . . . 67
8.5.1. Bezout-tétel . . . 67
8.5.2. Bertrand-tétel . . . 67
8.5.3. Catalan-sejtés . . . 67

8.5.4. Egészrész és törtrész azonosságok 67
8.5.5. Euler-Fermat-tétel 68
8.5.6. kis Fermat-tétel 68
8.5.7. LTE (Lifting The Exponent) tétel 68
8.5.8. Legendre-tétel 68
8.5.9. Mihăilescu-tétel 69
8.5.10. Osztók száma 69
8.5.11. Polinom 69
8.5.12. Wilson-tétel 69
8.5.13. Wolstenholme-tételek 69

9. Táblázatok 70
9.1. Konstansok 70
9.1.1. e 100 tizedesre 70
9.1.2. $\frac{1}{e}$ 100 tizedesre 70
9.1.3. ϕ 100 tizedesre 70
9.1.4. $\frac{1}{\phi}$ 100 tizedesre 70
9.1.5. π 100 tizedesre 70
9.1.6. π^2 100 tizedesre 71
9.1.7. $\frac{1}{\pi}$ 100 tizedesre 71
9.1.8. $\sqrt{2}$ 100 tizedesre 71
9.1.9. $\sqrt{3}$ 100 tizedesre 71
9.2. Dátumok, évszámok 71
9.2.1. Évszámok prímfelbontása 71
9.3. Prímek 8110-ig 72
9.4. Binomiális együtthatók 73
9.4.1. Pascal háromszög 73
9.4.2. Speciális binomiális együtthatók 73
9.5. Catalan számok 74
9.5.1. Catalan háromszög 74
9.5.2. Az első 60 Catalan szám 74
9.6. Fibonacci számok 75
9.6.1. Az első 30 Fibonacci szám prímfelbontása 75
9.6.2. Az első 60 Fibonacci szám 75
9.7. Pell egyenlet 76
9.7.1. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$ 76
9.7.2. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = 1$ 77
9.8. Pitagoraszi számhármasok 78
9.8.1. Számhármasok 203-ig 78
9.9. Ramsey számok 79
9.9.1. Ramsey számok két halmazra 79

10. Referencia 80

Tárgymutató 81

1. Előszó

Miért is álltam neki ennek a gyűjteménynek? Sokszor találkoztam olyan feladattal, aminek a megoldásához a középiskolás anyagon túli ismeret nem szükséges, mégis a folytonos összefüggés levezetések elvették az ember idejét, nehezen lehetett a megoldásra összpontosítani. Ez a probléma jelentkezett a diákoknál is.

Ez volt az indíttatás. Aztán ez lett belőle, ami itt van ☺.

Mi nem akar lenni ez a gyűjtemény? Nem akar lenni:
- tankönyv
- sokadik Függvénytábla
- bizonyítások gyűjteménye
- egyszerű adat- és/vagy számhalmaz

Ez a gyűjtemény úgy tűnik, hogy soha sem lesz kész, befejezett. Mindig van, amit be kellene írni, amit jó lenne látni benne. Mindig éppen csak félbe van hagyva. A gyűjtemény legfrissebb verziója (a verziószám és a dátum az első oldalon sokat segít ebben) letölthető a **http://www.eszesen2010.hu/**[1] címről. Ott a Matematika ⇒ Hasznosságok útvonalon látható és a Letöltés ⇒ Matematika útvonalról lehet letölteni.

Érezze magát mindenki feljogosítva a terjesztésre és használatra!

Érdemes a honlapot figyelni azért is, mert itt követhető majd az egyes verziók közötti változás (mivel bővült az újabb kiadás), így akár letöltés (és nyomtatás) nélkül ha szükséges kézzel be lehet írni a javítást és/vagy újabb összefüggéseket. E miatt viszont innentől kezdve az egyes összefüggések sorrendje (sorszáma) nem változik, hogy nyomon lehessen követni a változást.

Bár sokan átnézték és átolvasták már, közülük többen is jeleztek hibát, elírást, tévedést, mindig maradt/maradhatott benne még hiba. Ha ötlete lenne a gyűjtemény továbbfejlesztésére avagy hibát és/vagy elírást talált, vagy csak egyszerűen elmondaná a véleményét, kérném jelezni a szolda@szolda.hu e-mail címen vagy bármilyen módon nekem személyesen üzenve.

A 2.140801 verziótól kezdve (2014. augusztus 1.-i kiadás) a szerkesztés LaTeX[2] felhasználásával történik (programcsomag: MIKTeX[3], front end szerkesztő: TeXstudio[4]), ugyanis a Microsoft Word[5] nem bírja már.

Szoldatics József

Dunakeszi, 2014. július 19.

[1] ESZESEN KFT honlapja
[2] LaTeX egy TeX-en alapuló szövegformázó rendszer, alkotója Leslie Lamport
[3] A MIKTeX a TeX/LaTeX ingyenes Windows-os változata
[4] TeXstudio egy integrált környezet LaTeX dokumentumok létrehozásához
[5] A Microsoft Word egy szövegszerkesztő a Microsoft Office programcsomagjában

2. Alkalmazott jelölések

2.1. Halmazok

Az alkalmazott halmaz jelölések:

- $\mathbb{N}$: a természetes számok halmaza, $\{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$
- $\mathbb{Z}$: az egész számok halmaza, $\{... -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$
  $\mathbb{Z}^+$: a pozitív egész számok halmaza, $\{1; 2; 3; 4; ...\}$
  $\mathbb{Z}^-$: a negatív egész számok halmaza, $\{-1; -2; -3; -4; ...\}$, ...
- $\mathbb{Q}$: a racionális számok halmaza
  $\mathbb{Q}^+$: a pozitív racionális számok halmaza
  $\mathbb{Q}^-$: a negatív racionális számok halmaza, ...
- $\mathbb{Q}^*$: az irracionális számok halmaza
  $\mathbb{Q}^{*+}$: a pozitív irracionális számok halmaza
  $\mathbb{Q}^{*-}$: a negatív irracionális számok halmaza, ...
- $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$
  $\mathbb{R}^+$: a pozitív valós számok halmaza
  $\mathbb{R}^-$: a negatív valós számok halmaza, ...
- $\mathbb{P}$: a pozitív prím számok halmaza, $\{2; 3; 5; 7; 11; ...\}$

2.2. Függvény

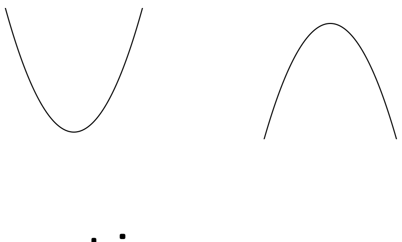
Bijektív függvény Ha injektív és szürjektív is. *(Kölcsönösen egyértelmű)*

Injektív függvény $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

Szürjektív függvény *(ráképzés)* $\forall y \in R_f \quad \exists x \in D_f; \quad f(x) = y$

Konvex és konkáv függvény

Konvex Konkáv

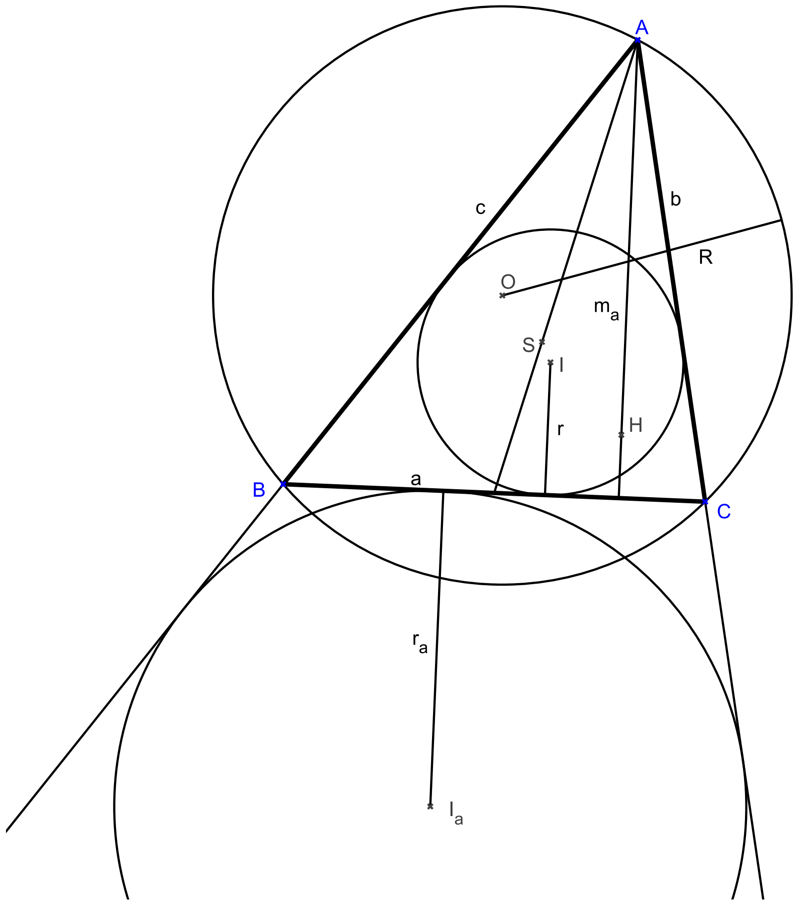


2.3. Geometria

A geometria leírásához használt jelölések a szokásosak (A csúcsnál $\alpha\sphericalangle$, vele szemben a oldal található...), ettől eltérőek a következők

- s: a háromszög félkerülete $s = \dfrac{a+b+c}{2}$
- O *ill.* R: a háromszög körülírt körének középpontja illetve sugara

- I *ill.* r: a háromszög beírt körének középpontja illetve sugara
- I_a *ill.* r_a: a háromszög BC oldalához (a oldal) írt kör középpontja illetve sugara
- m_a: a háromszög A csúcsához tartozó magasság
- f_a: a háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelező
- f_a': a háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelező
- S: a háromszög súlypontja
- s_a: a háromszög A csúcsához tartozó súlyvonal
- H: a háromszög magasságpontja (ortocentruma)



2.4. Egyebek

- $=\Leftrightarrow$ jelentése: egyenlőség akkor és csak akkor
- $\sum\limits_{sym}^{x_1,x_2,x_3} x_i^2 x_j$ vagy röviden $\sum\limits_{sym} x_i^2 x_j$ az összes $x_i^2 x_j$ szorzat összegét, azaz

$$\sum_{sym} x_i^2 x_j = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2$$

- $\sum\limits_{cycl}^{x_1,x_2,x_3} x_i^2 x_j$ vagy röviden $\sum\limits_{cycl} x_i^2 x_j$ az összes $x_i^2 x_j$ szorzat ciklikus (körbemenő)összegét, azaz

$$\sum_{cycl} x_i^2 x_j = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$

3. Algebra

3.1. Azonosságok 10
3.1.1. Másodfokú, két változó 10
3.1.2. Másodfokú, több változó 10
3.1.3. Harmadfokú, két változó 11
3.1.4. Harmadfokú, több változó 11
3.1.5. Magasabb fokú 12
3.1.6. Binom, trinom, ... 12
3.2. Összegzések 13
3.2.1. Hatványösszegek 13
3.2.2. Vegyes egész összegek 14
3.2.3. Vegyes tört összegek 15
3.3. Szimmetrikus polinomok 15
3.3.1. Két változó 15
3.3.2. Három változó 15
3.4. Egyenletek általános megoldása 16
3.4.1. Viète formulák 16
3.4.2. Egyenletek racionális gyökei . . . 16
3.4.3. Horner elrendezés 17
3.5. Megoldó képletek 17
3.5.1. Másodfokú egyenlet 17
3.5.2. Harmadfokú egyenlet 17
3.5.3. Negyedfokú egyenlet 19
3.6. Speciális egyenletek 20
3.6.1. Szimmetrikus egyenlet 20
3.6.2. Antiszimmetrikus egyenlet 20
3.7. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$ 21
3.7.1. A megoldások szerkezete 21
3.7.2. $x^2 - Dy^2 = k$ első megoldásai . . 21
3.7.3. $x^2 - Dy^2 = 1$ első megoldásai . . 21

3.1. Azonosságok

3.1.1. Másodfokú, két változó

1. $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$
2. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$
3. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
4. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$
5. $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$
6. $x^2 + y^2 + xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x+y)^2}{2}$
7. $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + xy\right)$
8. $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x-y)^2}{2}$
9. $x^2 + y^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2 + y^2 - xy\right)$
10. $4\left(x^2 + xy + y^2\right) = 3(x+y)^2 + (x-y)^2$
11. $3\left(x^2 - xy + y^2\right) = \left(x^2 + xy + y^2\right) + 2(x-y)^2$

3.1.2. Másodfokú, több változó

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x+y+z)^2$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx) = (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y)$
3. $x^2 + y^2 + z^2 + (xy + yz + zx) = \dfrac{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2}{2}$

4. $xy + yz + zx - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y)$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \dfrac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2}$
6. $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = (x - y)^2 + (x - z)(y - z)$
7. $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \dfrac{(2x - y - z)^2 + (2y - z - x)^2 + (2z - x - y)^2}{6}$
8. $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - x(y + z + w) = \dfrac{x^2 + (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2w)^2}{4}$

3.1.3. Harmadfokú, két változó

1. $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$
2. $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$
3. $x^3 + y^3 + 3xy - 1 = (x + y - 1)\left[(x + y)^2 + (x + y) - 3xy + 1\right]$
4. $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$
5. $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x\left(x^2 + 3y^2\right)$
6. $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y\left(3x^2 + y^2\right)$

3.1.4. Harmadfokú, több változó

1. $(xy + yz + zx)(x + y + z) = \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) + \left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right) + 3xyz$
2. $(xy + yz + zx)(x + y + z) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$
3. $(x + y)(y + z)(z + x) = \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) + \left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right) + 2xyz$
4. $3(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^3 - \left(x^3 + y^3 + z^3\right)$
5. $(x + y)(y + z)(z + x) - 8xyz = 2z(x - y)^2 + (x + y)(x - z)(y - z)$
6. $(x - y)(y - z)(z - x) = \left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right)$
7. $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z) = \left(xy^3 + yz^3 + zx^3\right) - \left(x^3y + y^3z + z^3x\right)$
8. $(x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx) = \left(x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3\right) - \left(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2\right)$
9. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \dfrac{(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]}{2}$
10. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x - y)^2 + (x + y + z)(x - z)(y - z)$
11. $xy^2 + yz^2 + zx^2 - 3xyz = z(x - y)^2 + y(x - z)(y - z)$
12. $(x + y + z)(xy + yz + zx) = x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 3xyz$
13. $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2 - (x - y + z)^2 - (-x + y + z)^2 = 8(xy + yz + zx)$
14. $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

3.1.5. Magasabb fokú

1. $(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy\,(x+y)\,\left(x^2+xy+y^2\right)$
2. $(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy\,(x+y)\,\left(x^2+xy+y^2\right)^2$
3. $x^4+4y^4 = \left(x^2+2y^2\right)^2 - 4x^2y^2 = \left(x^2+2xy+2y^2\right)\left(x^2-2xy+2y^2\right)$
4. $x^4+x^2y^2+y^4 = \left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right) = \dfrac{\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right]\left[x^2+y^2+(x-y)^2\right]}{4}$
5. $x^4+y^4+z^4-x^3y-y^3z-z^3x = \left(x^2+xy+y^2\right)(x-y)^2 + \left(y^2+yz+z^2\right)(x-z)(y-z)$
6. $\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right) = \left(x^2y+y^2z+z^2x-xyz\right)^2 + \left(xy^2+yz^2+zx^2-xyz\right)^2$
7. $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$
8. $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)+8xyz = (1+xyz)^2+(x+yz)^2+(y+zx)^2+(z+xy)^2$
9. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3 =$
   $3(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(c-a)$
10. $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$
11. $\left(a^2+kb^2\right)\left(c^2+kd^2\right) = (ac-kbd)^2+k\,(ad+bc)^2 = (ac+kbd)^2+k\,(ad+bc)^2$
12. $\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right) = (ac+bd)^2-(ad+bc)^2 = (ac-bd)^2-(ad-bc)^2$
13. $\left(a^2-kb^2\right)\left(c^2-kd^2\right) = (ac+kbd)^2-k\,(ad+bc)^2 = (ac-kbd)^2-k\,(ad-bc)^2$
14. $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$
15. $(xy+yz+zx)^2-3xyz\,(x+y+z) = \dfrac{(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2}{2}$
16. $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 + \sum\limits_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$ Lagrange azonosság

3.1.6. Binom, trinom, ...

1. $(x\pm y)^2 = x^2\pm 2xy+y^2$
2. $(x\pm y)^3 = x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$
3. $(x\pm y)^4 = x^4\pm 4x^3y+6x.^2y^2\pm 4xy^3+y^4$
4. $(x\pm y)^5 = x^5\pm 5x^4y+10x.^3y^2\pm 10x6^2y^3+5xy^4\pm y^5$
5. $(x\pm y)^n = \sum\limits_{i=0}^n (-1)^i \begin{pmatrix} \mathrm{n} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} x^{n-i}y^i$
6. $(x+y+z)^2 = x^2+y^22+z^2+2xy+2yz+2zx$
7. $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz$

8. $(x_1+x_2+x_3)^3 == \sum_{sym} x_i^3 + 3\sum_{sym} x_i^2 x_j + 6x_1x_2x_3$

9. $(x_1+x_2+x_3)^4 == \sum_{sym} x_i^4 + 4\sum_{sym} x_i^3 x_j + 6\sum_{sym} x_i^2 x_j^2 + 12\sum_{sym} x_i^2 x_j x_k$

10. $(x_1+x_2+x_3)^5 == \sum_{sym} x_i^5 + 5\sum_{sym} x_i^4 x_j + 10\sum_{sym} x_i^3 x_j^2 + 20\sum_{sym} x_i^3 x_j x_k + 30\sum_{sym} x_i^2 x_j^2 x_k$

3.2. Összegzések

3.2.1. Hatványösszegek

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n^2+n}{6}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12} = \frac{2n^6+6n^5+5n^3-n^2}{12}$

6. $\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)}{42} = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^2(n+1)^2\left(3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right)}{24} = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24}$

8. $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right)}{90} =$
$$= \frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$$

9. $\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^2(n+1)^2\left(n^2+n-1\right)\left(2n^4+4n^3-n^2-3n+3\right)}{20} =$
$$= \frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$

10. $\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(n^2+n-1\right)\left(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5\right)}{66} =$
$$= \frac{6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n}{66}$$

3.2.2. Vegyes egész összegek

1. $n+(n+1)+(n+2)+...+(n+m)=\dfrac{(2n+m)(m+1)}{2}$
2. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$
3. $2+4+6+...+2n=n(n+1)$
4. $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$
5. $2+5+8+...+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$
6. $3+6+9+...+(3n)=\dfrac{n(3n+3)}{2}$
7. $1+8+16+...+8(n-1)=(2n-1)^2$
8. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$
9. $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
10. $1^2+4^2+7^2+...+(3n-2)^2=\dfrac{n\left(6n^2-3n-1\right)}{2}$
11. $2^2+5^2+8^2+...+(3n-1)^2=\dfrac{n\left(6n^2+3n-1\right)}{2}$
12. $3^2+6^2+9^2+...+(3n)^2=\dfrac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$
13. $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$
14. $2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$
15. $1^3+4^3+7^3+...+(3n-2)^3=\dfrac{n\left(27n^3-18n^2-9n+4\right)}{4}$
16. $2^3+5^3+8^3+...+(3n-1)^3=\dfrac{n\left(27n^3+18n^2-9n-4\right)}{4}$
17. $3^3+6^3+9^3+...+(3n)^3=\dfrac{27n^2(n+1)^2}{4}$
18. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$
19. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$
20. $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5}$
21. $1\cdot 2\cdots k+2\cdot 3\cdot\cdots(k+1)+...+n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdots(n+k)}{k+1};\quad k\in\mathbb{N}\geq 2$

3.2.3. Vegyes tört összegek

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$
2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$
3. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n\,(n+10)}\right)=\frac{3n^2-n-2}{4n\,(n+1)}$

3.3. Szimmetrikus polinomok

$$e_1=\sum_i a_i \quad e_2=\sum_{i,j} a_ia_j \quad e_3=\sum_{i,j,k} a_ia_ja_k \quad \dots \quad e_n=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} a_{i_1}a_{i_2}\cdot a_{i_n}$$

$$\sum_i a_i^n=\begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2e_2 & e_1 & 1 & 0 & \dots \\ 3e_3 & e_2 & e_1 & 1 & \dots \\ 4e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & \dots \\ \dots \\ ne_n & e_{n-1} & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$$

3.3.1. Két változó

$$\begin{cases} e_1=a+b \\ e_2=ab \end{cases} \qquad e_3=e_4=\dots=0 \qquad \sum_i a_i^n=\begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2e_2 & e_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & e_2 & e_1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & e_2 & e_1 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$$

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=e_1^2-2e_2$
2. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b)=e_1^3-3e_1e_2$
3. $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab\,(a+b)^2+2a^2b^2=e_1^4-4e_1^2e_2+2e_2^2$
4. $a^5+b^5=(a+b)^5-5ab\,(a+b)^3+5a^2b^2\,(a+b)=e_1^5-5e_1^3e_2+5e_1e_2^2$
5. $a^6+b^6=(a+b)^6-6\,(a+b)^4\,ab+9\,(a+b)^2\,a^2b^2-2a^3b^3=e_1^6-6e_1^4e_2+9e_1^2e_2^2-2e_2^3$
6. $a^7+b^7=(a+b)^7-7\,(a+b)^5\,ab+14\,(a+b)^3\,a^2b^2-7\,(a+b)\,a^3b^3=e_1^7-7e_1^5e_2+14e_1^3e_2^2-7e_1e_2^3$

3.3.2. Három változó

$$\begin{cases} e_1=a+b+c \\ e_2=ab+bc+ca \\ e_3=abc \end{cases} \qquad e_4=e_5=\dots=0 \qquad \sum_i a_i^n=\begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2e_2 & e_1 & 1 & 0 & \dots \\ 3e_3 & e_2 & e_1 & 1 & \dots \\ 0 & e_3 & e_2 & e_1 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$$

1. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=e_1^2-2e_2$
2. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=e_1^2-3e_1e_2+3e_3$
3. $a^4+b^4+c^4=(a+b+c)^4-4(a+b+c)^2(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c)=$ $=e_1^4-4e_1^2e_2+2e_2^2+4e_1e_3$
4. $a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b+c)^3(ab+bc+ca)+5abc(a+b+c)^2+5(a+b+c)(ab+bc+ca)^2-$ $5abc(ab+bc+ca)=e_1^5-5e_1^3e_2+5e_1^2e_3+5e_1e_2^2-5e_1e_2$

3.4. Egyenletek általános megoldása

3.4.1. Viète formulák

Másodfokú egyenlet $ax^2+bx+c=0 \quad a\neq 0$

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Harmadfokú egyenlet $ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad a\neq 0$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

Negyedfokú egyenlet $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad a\neq 0$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4++x_3x_4 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 &= -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{e}{a} \end{aligned}$$

3.4.2. Egyenletek racionális gyökei

Az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ egész együtthatós egyenlet racionális gyökeire:

$$x=\pm\frac{p}{q}; \qquad (p;q)=1; \qquad p|a_0; \qquad q|a_n$$

3.4.3. Horner elrendezés

A függvények (polinomok) értékének adott helyen való gyors kiszámolására való.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

A módszer lényeges eleme az ún. Horner-elrendezés, azaz hogy ezt a fenti egyenletet táblázatba rendezzük azért, hogy a számolást meg tudjuk gyorsítani: A táblázat kitöltésének lépései:

1. A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
2. Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő x_0 értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
3. Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk x_0 értékével,, hozzáadjuk amellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
4. Az $f(x_0)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0
x_0	a_n	$x_0 \cdot a_n + a_{n-1}$	$x_0 \cdot (x_0 \cdot a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}$	$\ldots$	$f(x_0)$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	

Az utolsó sorból leolvasható az polinom osztás végeredményei is:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$

$$= (x - x_0)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) + f(x_0)$$

3.5. Megoldó képletek

3.5.1. Másodfokú egyenlet

Megoldó képlet

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.5.2. Harmadfokú egyenlet

Harmadfokú egyenlet áttranszformálása hiányos alakra

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ez a következő helyettesítéssel át lehet hozni egy hiányos alakra:

$$x' = x - \frac{a}{3}, \qquad p = b - \frac{a^3}{3}, \qquad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Cardano képlet

$$x^3 + px + q = 0 \qquad\qquad \varepsilon = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
x_2 &= \varepsilon\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
x_3 &= \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\varepsilon\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}
\end{aligned}$$

Cardano-képlet kibontva és elemezve. Legyen

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Ekkor a gyökök:

$$\begin{aligned}
x_1 &= A+B \\
x_2 &= -\frac{A+B}{2}+i\cdot\frac{A-B}{2} \\
x_3 &= -\frac{A+B}{2}-i\cdot\frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

Speciális esetek Legyen

$$Q=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

- Ha $Q<0$ és $p<0$,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\alpha}{3} \\
x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \\
x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

  ahol $\cos\alpha=-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$, azaz $\alpha=\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)$

- Ha $Q>0$ és $p>0$,

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\operatorname{ctg}2\alpha \\
x_2 &= \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{ctg}2\alpha+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos 2\alpha}\right) \\
x_3 &= \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{ctg}2\alpha-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos 2\alpha}\right)
\end{aligned}$$

  ahol $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}, \quad |\alpha|\le\frac{\pi}{4}, \quad |\beta|\le\frac{\pi}{2}$

- Ha $Q \geq 0$ és $p < 0$,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} \\
x_2 &= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} + i \cdot \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \\
x_3 &= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - i \cdot \sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha \right)
\end{aligned}
$$

ahol $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}, \quad \sin \beta = \frac{2}{q} \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad |\alpha| \leq \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{2}$

3.5.3. Negyedfokú egyenlet

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p \right)^2 + \left(b - 2p - \frac{a^2}{4} \right) x^2 + (c - ap)\, x + \left(d - p^2 \right) = 0$$

A második rész diszkriminánsa, ha nulla (ez „p”-re harmadfokú egyenletet ad), akkor a második rész teljes négyzet és megoldható az egyenlet.

Explicit megoldás Az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad a \neq 0$ egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}$$

ahol

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2 e + 27ad^2 - 72ace$$

$$\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}; \qquad q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2 d}{8a^3}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}\, p + \frac{1}{3a} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)} \qquad Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$$

Speciális esetek

- Ha $\Delta > 0$, akkor Q komplex szám. Kényelmesebb ebben az esetben a következő alakot használni:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}\, p + \frac{2}{3a} \sqrt{\Delta_0} \cos \frac{\phi}{3}}$$

ahol

$$\phi = \arccos \left(\frac{\Delta_1}{2\sqrt{\Delta_0^3}} \right).$$

- Ha $\Delta \neq 0$ és $\Delta_0 = 0$, akkor a $\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3} = \sqrt{\Delta_1^2}$ előjelét úgy kell megválasztani, hogy $Q \neq 0$, legyen olyan $\sqrt{\Delta_1^2}$ mint Δ_1.
- Ha $S = 0$, akkor meg kell változtatni Qértékétúgy, hogy $S \neq 0$. Ez mindig lehetséges, kivéve, ha átírható az egyenlet $\left(x + \frac{b}{4a}\right)^4$ alakba.
- Ha If $\Delta = 0$ és $\Delta_0 = 0$ valamint $\Delta_1 = 0$, akkor legkevesebb 3 gyök megegyezik, amelyek az együtthatókból könnyű kiszámolni.
- Ha $\Delta = 0$ és $\Delta_0 \neq 0$, ekkor a megoldóképlet jó, de az egyenlet más módszerrel könnyebben megoldható (fokszám visszavezetés).

3.6. Speciális egyenletek

3.6.1. Szimmetrikus egyenlet

Páros kitevő esetén

$$a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-1} + a_{n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$$a_n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_0 = 0$$

alakra hozható, ami új ismeretlen bevezetésével

$$x + \frac{1}{x} = a; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a; \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2 \ldots$$

az egyenlet fokszáma feleződik.

Páratlan kitevő esetén

$$a_n x^{2n+1} + a_{n-1}x^{2n} + a_{n-2}x^{2n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

az egyenlet megoldása az $x = -1$, így az egyenlet fokszáma (az osztás után) eggyel csökken.

3.6.2. Antiszimmetrikus egyenlet

Páros kitevő esetén

$$a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-1} + a_{n-2}x^{2n-2} + \ldots - a_{n-2}x^2 - a_{n-1}x - a_n = 0$$

az egyenlet gyöke az $x = 1$ és az $x = -1$ is, azaz $x^2 - 1$ kifejezés kiemelhető.

Páratlan kitevő esetén

$$a_n x^{2n+1} + a_{n-1}x^{2n} + a_{n-2}x^{2n-1} + \ldots - a_{n-2}x^2 - a_{n-1}x - a_n = 0$$

az egyenlet megoldása az $x = 1$, azaz $x - 1$ kifejezés kiemelhető.

3.7. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$

D nem lehet négyzetszám, k pedig nulla. Nevezzük az adott egyenlethez tartozó redukált ($k = 1$) egyenlet triviális megoldásának a $(1; 0)$ számpárt. A megoldások közötti első megoldásnak a legkisebb (mondjuk) x értékkel rendelkezőt nevezzük.

3.7.1. A megoldások szerkezete

Legyen a $x^2 - Dy^2 = 1$ első nem triviális megoldása $(x_0; y_0)$, a $x^2 - Dy^2 = k$ egyenlet első megoldása $(x_1; y_1)$, akkor a többi $(x_n; y_n)$megoldásra

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)^{n-1}$$

Ugyanez rekurziós alakban

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 \cdot x_{n-1} + y_0 \cdot y_{n-1} \cdot D \\ y_n &= x_0 \cdot y_{n-1} + y_0 \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

3.7.2. $x^2 - Dy^2 = k$ első megoldásai

D	**k**							
	-4	**-3**	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**4**
2	$(2; 2)$		$(4; 3)$	$(1; 1)$	$(3; 2)$	$(2; 1)$		$(6; 4)$
3		$(3; 2)$	$(1; 1)$		$(2; 1)$			$(4; 2)$
5	$(1; 1)$			$(2; 1)$	$(9; 4)$			$(3; 1)$
6			$(2; 1)$		$(5; 2)$		$(3; 1)$	$(10; 4)$

(További adatok: $\Rightarrow$ 76. oldal)

3.7.3. $x^2 - Dy^2 = 1$ első megoldásai

$D = 2$	$(3; 2)$	$D = 5$	$(9; 4)$	$D = 7$	$(6; 3)$	$D = 10$	$(18; 6)$
$D = 3$	$(2; 1)$	$D = 6$	$(5; 2)$	$D = 8$	$(3; 1)$	$D = 11$	$(10; 3)$

(További adatok: $\Rightarrow$ 77. oldal)

4. Egyenlőtlenségek

4.1. Nevezetes egyenlőtlenségek 22
4.1.1. Bernoull-egyenlőtlenségek 22
4.1.2. Carleman-egyenlőtlenség 22
4.1.3. Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségek 23
4.1.4. Csebisev-egyenlőtlenség 23
4.1.5. EV-egyenlőtlenség (Equal Variable Theorem) 23
4.1.6. Hilbert-egyenlőtlenség 24
4.1.7. Hölder-egyenlőtlenségek 24
4.1.8. Jensen-egyenlőtlenségek 24
- Konkáv függvény 24
- Konvex függvény 24
4.1.9. Minkowski-egyenlőtlenség 25
4.1.10. Muirhead-egyenlőtlenség 25
4.1.11. Nesbitt-egyenlőtlenség 25
4.1.12. Popoviciu-egyenlőtlenségek . . . 25
- Konkáv függvény 25
- Konvex függvény 25
4.1.13. Rendezési egyenlőtlenségek . . . 26
- Két sorozatra 26
- Több sorozatra 26
4.1.14. Schur-egyenlőtlenség 26
4.1.15. Számtani-mértani egyenlőtlenség 26
4.1.16. Számtani-mértani egyenlőtlenség, súlyozott forma 26
4.1.17. Számtani-mértani egyenlőtlenség, család 26
- Harmonikus közép 26
- Mértani közép 26
- Számtani közép 26
- Négyzetes közép 27
4.1.18. Számtani-mértani egyenlőtlenség, függvény alapon 27
4.1.19. Young-egyenlőtlenség 27
4.2. Megoldási technikák 27
4.2.1. Ismert egyenlőtlenségek 27
4.2.2. Algebrai helyettesítések 28
4.2.3. Trigonometrikus helyettesítések . 28

4.1. Nevezetes egyenlőtlenségek

4.1.1. Bernoull-egyenlőtlenségek

1. Legyen $r \in N$; $x \geq -1$ valós szám
$$(1+x)^r \geq 1+rx$$
Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $r = 0$

2. Legyen $r \in N$; $x \in R$
$$(1+x)^{2r} \geq 1+2rx$$
Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $r = 0$

4.1.2. Carleman-egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ valós számok

$$a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq e\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

(e = Euler konstans ⇒ 70. oldal)

.

4.1.3. Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségek

1. Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számok

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)$$

vagy

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

2. **Engel forma, Titu lemma:** Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ valós számok

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

3. Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ valós számok

$$\frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} + ... + \frac{a_n}{b_n^2} \geq \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \cdot \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $b_1 = b_2 = ... = b_n$

4. Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ valós számok

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $b_1 = b_2 = ... = b_n$

4.1.4. Csebisev-egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$ $a_1 \geq a_2 \geq, ... \geq a_n \geq 0$; $b_1 \geq b_2 \geq .. \geq b_n$ valós számok

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1}{n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

4.1.5. EV-egyenlőtlenség (Equal Variable Theorem)

Legyen

$$n \in N^+ > 2;\ a_1, a_2, \ldots, a_n > 0;\ x_1, x_2, \ldots, x_n > 0;\ p \neq q \in R$$

valós számok úgy. hogy

$$x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p = a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p$$

és

$$x_1^q + x_2^q + ... + x_n^q = a_1^q + a_2^q + ... + a_n^q$$

(ha p vagy q nulla, akkor $x_1 x_2 ... x_n = a_1 a_2 ... a_n$).
Legyen $f(x)$ differenciálható függvény a a pozitív számokon úgy, hogy

$$g(x) = x^{\frac{1-q}{p-q}} f'\left(x^{\frac{1}{p-q}}\right)$$

szigorúan konvex függvény., valamint legyen

$$F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$$

Ha $pq \leq 0$, akkor
- F minimális esetében $x_1 \leq x_2 = x_3 = ... = x_n$
- F maximális esetében $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \leq x_n$

Ha $p > 0,\ q > 0$, akkor
- F minimális esetében $0 = x_1 = x_2 = ... = x_{k-1} \leq x_k \leq x_{k+1} = ...x_n$ ahol $1 \leq k \leq n$
- F maximális esetében $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \leq x_n$

Ha $p < 0,\ q < 0$
- F minimális esetében $x_1 \leq x_2 = x_3 = ... = x_n$

4.1.6. Hilbert-egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$;$a_1, a_2,\ ...\ , a_n;\ \ b_1, b_2,\ ...\ , b_n \geq 0$ valós számok,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n + b_k}{n+k} < \pi\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2}$$

4.1.7. Hölder-egyenlőtlenségek

1. Legyen $a_1, a_2,\ ...\ , a_n;\ \ b_1, b_2,\ ...\ , b_n;\ \ ....\ \ z_1, z_2,\ ...\ , z_n > 0$ valós számok, $m \in R^+$;

$$\sqrt[m]{a_1^m + ... + a_n^m}\cdot\sqrt[m]{b_1^m + ... + b_m^m}...\cdot\sqrt[m]{z_1^m + ... + z_m^m} \geq \sqrt[m]{a_1 b_1..z_1} + ... + \sqrt[m]{a_n b_n..z_n}$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a megfelelő számok aránya megegyezik.

2. Legyen $a_1, a_2,\ ...\ , a_n;\ \ b_1, b_2,\ ...\ , b_n$ valós számok, $p, q > 1$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}\cdot\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q + ... + b_m^q} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

4.1.8. Jensen-egyenlőtlenségek

1. Legyen $a_1, a_2, ...a_n \in [a, b]$ valós számok, $f(x)$ konkáv függvény ezen az intervallumon

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)}{n}$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

2. Legyen $a_1, a_2, ...a_n \in [a, b]$ valós számok, $f(x)$ konvex függvény ezen az intervallumon

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)}{n}$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

4.1.9. Minkowski-egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \; ... \; , a_n$; $b_1, b_2, \; ... \; , b_n$ valós számok

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

4.1.10. Muirhead-egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$; $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$; $b_1 \geq b_2 \geq, .. \geq b_n$ valós számok, valamint

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1 \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &\geq b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} &\geq b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + ... + a_n &= b_1 + b_2 + ... + b_n \end{aligned}$$

akkor tetszőleges pozitív $x_1, x_2, \; ... \; , x_n$ való számok esetén

$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n$

4.1.11. Nesbitt-egyenlőtlenség

Legyen $a, b, c > 0$ valós számok

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$

4.1.12. Popoviciu-egyenlőtlenségek

1. Legyen $x, y, z \in [a, b]$; $p, q, r \in R^+$ valós számok, $f(x)$ konkáv függvény ezen az intervallumon

$$\begin{aligned} pf(x) + qf(y) + rf(z) + (p+q+r)\, f\left(\tfrac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \geq \\ \geq (p+q)\, f\left(\tfrac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)\, f\left(\tfrac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)\, f\left(\tfrac{rz+px}{r+p}\right) \end{aligned}$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = y = z$
   Ha $p = q = r$. akkor

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

2. Legyen $x, y, z \in [a, b]$; $p, q, r \in R^+$ valós számok, $f(x)$ konvex függvény ezen az intervallumon

$$\begin{aligned} pf(x) + qf(y) + rf(z) + (p+q+r)\, f\left(\tfrac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \leq \\ \leq (p+q)\, f\left(\tfrac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)\, f\left(\tfrac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)\, f\left(\tfrac{rz+px}{r+p}\right) \end{aligned}$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = y = z$
   Ha $p = q = r$. akkor

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

4.1.13. Rendezési egyenlőtlenségek

1. Legyen $n \in N^+$; $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$; $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ valós számok, valamint $c_1, c_2, \ ... \ , c_n$ számok a $b_1, b_2, ..b_n$tetszőleges permutációja

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

2. Legyen $n \in N^+$; $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$; $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$; ..... $z_1 \geq z_2 \geq ... \geq z_n$ valós számok, valamint a *-gal jelölt sorozatok az eredeti egy tetszőleges permutációja

$$a_1 b_1^* .. z_1^* + a_2 b_2^* .. z_2^* + ... + a_n b_n^* ..... z_n^* \leq a_1 b_1 .. z_1 + a_2 b_2 .. z_2 + ... + a_n b_n ..... z_n$$

4.1.14. Schur-egyenlőtlenség

Legyen $a, b, c > 0$; r valós szám

$$a^r (a-b)(a-c) + b^r (b-c)(b-a) + c^r (c-a)(c-b) \geq 0$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$ vagy $a = b, \ c = 0$

4.1.15. Számtani-mértani egyenlőtlenség

Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ ... \ , a_n > 0$ valós számok

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

4.1.16. Számtani-mértani egyenlőtlenség, súlyozott forma

Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ ... \ , a_n > 0$ valós számok, $m_1, m_2, \ ... \ , m_n \in N^+$

$$\sqrt[m_1+m_2+...+m_n]{a_1^{m_1} a_2^{m_2} ... a_n^{m_n}} \leq \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_n a_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

4.1.17. Számtani-mértani egyenlőtlenség, család

Legyen $n \in N^+$; $a_1, a_2, \ ... \ , a_n > 0$ valós számok

Harmonikus közép

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Mértani közép

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Számtani közép

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Négyzetes közép

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

$$\min(a_i) \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \le \max(a_i)$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

4.1.18. Számtani-mértani egyenlőtlenség, függvény alapon

Legyen $a_1, a_2,\ ...\ , a_n > 0;\ \ n \in N^+$ számok.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} & x \ne 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} & x = 0 \end{cases}$$

függvény, ami folytonos$n \in N^+;\ \ a_1, a_2, ...a_n > 0$ és szigorúan monoton növekvő, ha a számok különbözőek

4.1.19. Young-egyenlőtlenség

Legyen $a, b \ge 0$ valós számok, $p, q > 1;$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a^p = b^q$

4.2. Megoldási technikák

4.2.1. Ismert egyenlőtlenségek

1. Legyen a, b, c valós számok

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$

2. Legyen $a, b, c > 0$ valós számok

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \ge 1$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$

3. Legyen $a, b, c > 0$ valós számok

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \ge \frac{1}{3}$$

   vagy

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge (a + b + c)^2$$

   Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$

4.2.2. Algebrai helyettesítések

1. $xyz = 1$ $\quad x = \frac{1}{a};\ y = \frac{1}{b};\ z = \frac{1}{c}$ $\quad abc = 1$
2. $xyz = 1$ $\quad x = \frac{p}{q};\ y = \frac{q}{r};\ z = \frac{r}{p}$
3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ $\quad a = \frac{x-1}{x};\ b = \frac{y-1}{y};\ c = \frac{z-1}{z}$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ $\quad a = \frac{x}{x-1};\ b = \frac{y}{y-1};\ c = \frac{z}{z-1}$ $\quad \Rightarrow \quad a + b + c = 1$

4.2.3. Trigonometrikus helyettesítések

1. $x^2 + y^2 = 1$ $\quad x = \sin\alpha;\ y = \cos\alpha$
2. $1 + x^2$ $\quad x = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3. $\frac{1}{1+x^2}$ $\quad x = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$
4. $\sqrt{1+x^2}$ $\quad x = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$
5. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad x = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha$
6. $x + y + z = xyz$ $\quad x = \operatorname{tg}\alpha;\ y = \operatorname{tg}\beta;\ z = \operatorname{tg}\gamma$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$
7. $x + y + z = xyz$ $\quad x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\ y = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2};\ z = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$
8. $x + y + z = 1$ $\quad x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2};\ z = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$
9. $xy + yz + zx = 1$ $\quad x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2};\ z = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$
10. $xy + yz + zx = 1$ $\quad x = \operatorname{ctg}\alpha;\ y = \operatorname{ctg}\beta;\ z = \operatorname{ctg}\gamma$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$
11. $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

5. Geometria

5.1. Tételek 29
5.1.1. Brahmagupta-tétel 29
5.1.2. Bretschneider-tételek 29
- Egy négyszög területe 29
- Tetszőleges négyszögree 30
5.1.3. Brianchon-tétel 30
5.1.4. Ceva-tétel 30
5.1.5. Ceva-tétel trigonometrikus alakja 30
5.1.6. Desargues-tétel 30
5.1.7. Descartes-tétel 31
5.1.8. Euler-egyenes 31
5.1.9. Feuerbach-kör 31
5.1.10. Feuerbach-tétel 31
5.1.11. Gergonne-pont 32
5.1.12. "Kotangens-trükk" 32
5.1.13. Menelaosz-tétel 32
5.1.14. Morley-tétel 32
5.1.15. Nagel-pont 32
5.1.16. Pappos-tétel 33
5.1.17. Pascal-tétel 33
5.1.18. Pitagorasz-tétel, általánosítás . . 33
5.1.19. Ptolemaiosz-tétel 33
5.1.20. Reuschle-tétel 33
5.1.21. Simson-(Wallace) egyenes 34
5.1.22. Stewart-tétel 34
5.1.23. Varignon-tétel 34
5.1.24. "Névtelen" állítások 34
5.2. Geometriai egyenlőtlenségek 34
5.2.1. Erdős-Mordell-egyenlőtlenség . . 34
5.2.2. Euler-gyenlőtlenség 35
5.2.3. Háromszög egyenlőtlenség 35
5.2.4. Mitrinovic-egyenlőtlenségg 35
5.2.5. Padoa-egyenlőtlenség 35
5.2.6. Ptolemaiosz-egyenlőtlenség . . . 35
5.2.7. Weitzenböck-egyenlőtlenség . . . 35
5.2.8. "Névtelen" egyenlőtlenségek . . . 36
5.3. Háromszög 36
5.3.1. Háromszögekre vonatkozó összefüggések 37
5.3.2. Háromszögek területképletei . . . 42
5.3.3. Háromszög nevezetes pontjainak távolsága 43
5.4. Trigonometria 44
5.4.1. Trigonometrikus összefüggések . 44
5.4.2. Szögek pontos trigonometrikus értékei 47
5.4.3. Trigonometrikus értékek sorozata 49
5.4.4. Trigonometrikus összegek 50
5.5. Vektorok 50
5.5.1. Háromszög egyenlőtlenségek . . . 50
5.5.2. Háromszög 50
5.5.3. Négyszög 51

A közölt azonosságok, összefüggések csak a bennük szereplő kifejezések értelmezése esetére vannak felírva, ezt külön nem jelezzük

(Jelölések: ⇒ 7. oldal)

5.1. Tételek

5.1.1. Brahmagupta-tétel

Egy húrnégyszög területe

$$T_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

5.1.2. Bretschneider-tételek

1. **Egy négyszög területe:**

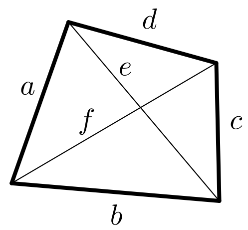
$$T_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \phi} \qquad s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

ahol ϕ két szemközti szög összegének fele.

2. **Tetszőleges négyszögre igaz:**

$$e^2 \cdot f^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2abcd \cdot \cos\phi$$

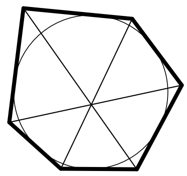
ahol ϕ két szemközti szög összege.



5.1.3. Brianchon-tétel

Egy kúpszelet köré írt hatszög szemben levő csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át. (lásd duálisát: Pascal-tétele)

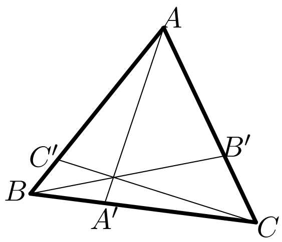
(Pascal tétel: ⇒ 33. oldal)



5.1.4. Ceva-tétel

Ha az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög oldalegyenesein $C' \in AB$, $B' \in CA$, $A' \in BC$ az ***AA'***, ***BB'***, ***CC'*** egyenesek akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



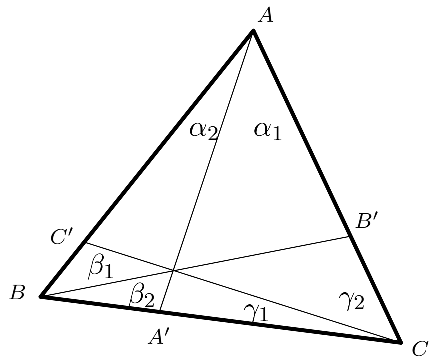
5.1.5. Ceva-tétel trigonometrikus alakja

Ha az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög oldalegyenesein

$$C' \in AB, \;\; B' \in CA, \;\; A' \in BC$$

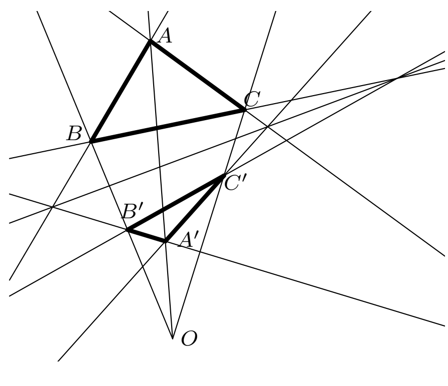
az ***AA'***, ***BB'***, ***CC'*** egyenesek akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

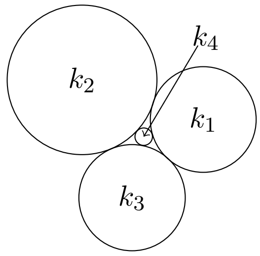


5.1.6. Desargues-tétel

Ha két háromszög egy pontra nézve perspektív, akkor egy egyenesre nézve is perspektív és viszont.

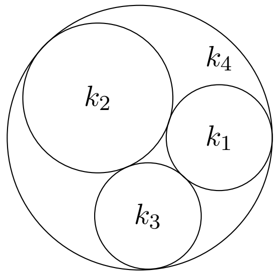


5.1.7. Descartes-tétel



Ha négy kör olyan elhelyezkedésű, hogy páronként érintik kívülről egymást, akkor a körök sugaraira

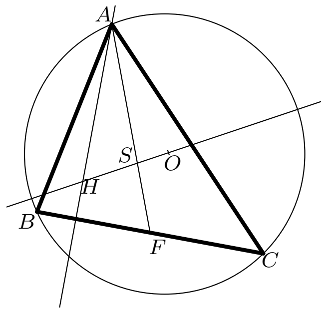
$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$



Ha négy kör olyan elhelyezkedésű, hogy páronként érintik egymást úgy, hogy az egyikük tartalmazza (k_4) a többit, akkor a körök sugaraira

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

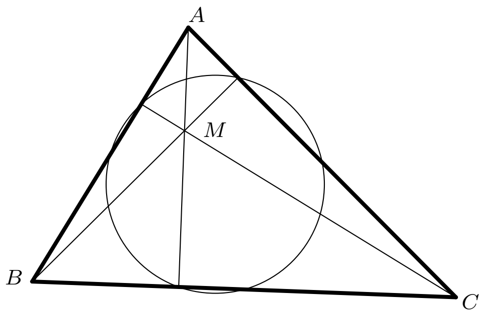
5.1.8. Euler-egyenes



A háromszög
- magasságpontja
- a súlypontja
- a köré írható kör középpontja

egy egyenesen van (Euler egyenes)
$OS : SH = 1 : 2$

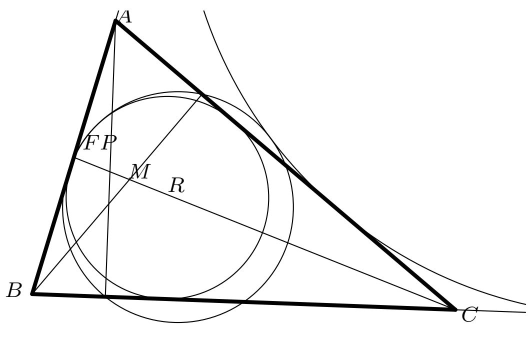
5.1.9. Feuerbach-kör



Az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög következő 3 x 3 pontja):
- oldalfelező pontjai
- magasságának talppontjai
- csúcs és a magasságpont felezőpontja

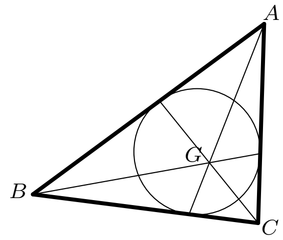
egy körön vannak.

5.1.10. Feuerbach-tétel



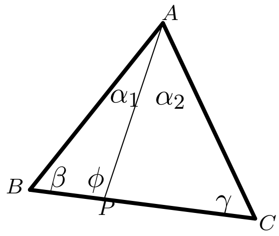
A háromszög Feuerbach köre érinti a beírt (Feuerbach pont) és a hozzáírt köröket

5.1.11. Gergonne-pont



Háromszögbe írt kör érintési pontjait a szemközti csúccsal összekötő szakaszok egy ponton mennek át.

5.1.12. "Kotangens-trükk"



Ha az $\boldsymbol{ABC}$ háromszögben $P \in BC$ akkor

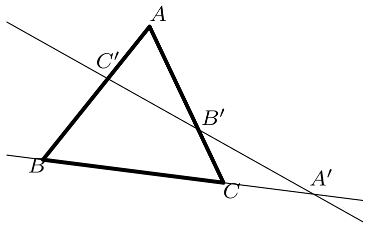
$$BC \cdot \operatorname{ctg} \varphi = BP \cdot \operatorname{ctg} \gamma - PC \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

és

$$BP \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 = BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha + PC \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

5.1.13. Menelaosz-tétel

Ha az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög oldalegyenesein

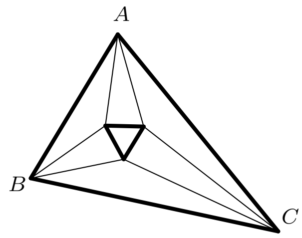


$$C' \in AB, \;\; B' \in CA, \;\; A' \in BC$$

akkor és csak akkor kollineárisak (egy egyenesen levők), ha

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

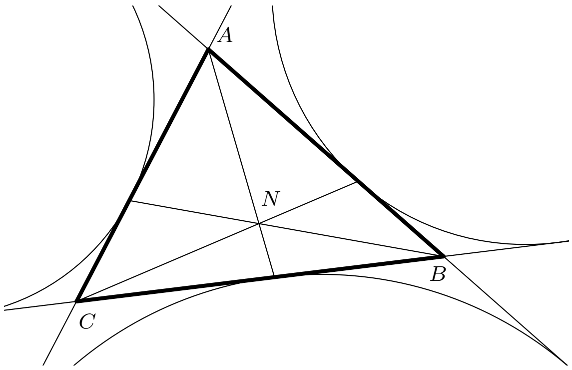
5.1.14. Morley-tétel



Háromszög szomszédos szögharmadolóinak metszéspontjai szabályos háromszöget határoznak meg.

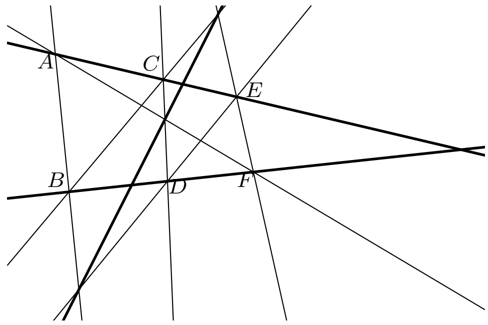
,

5.1.15. Nagel-pont



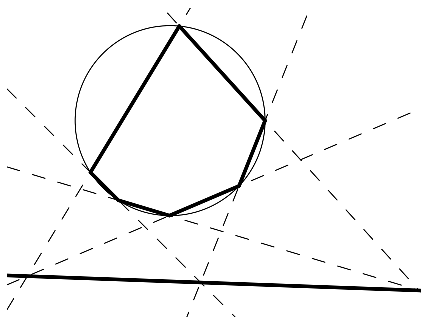
Háromszög hozzáírt köreinek érintési pontjait a szemközti csúccsal összekötő szakaszok egy ponton mennek át.

5.1.16. Pappos-tétel



Ha A, C, E pontok egy egyenes három pontja, B, D, F egy másik egyenes három pontja, akkor AB és DE metszéspontja, CD és FA metszéspontja, valamint EF és BC metszéspontja szintén egy egyenes három pontja.

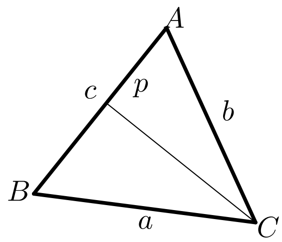
5.1.17. Pascal-tétel



Egy kúpszeletbe írt hatszög szembe levő oldalainak metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

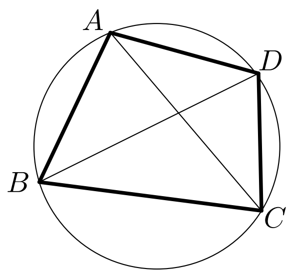
(Brianchon-tétele ⇒ 30. oldal)

5.1.18. Pitagorasz-tétel, általánosítás



Ha $\boldsymbol{ABC}$ hegyesszögű háromszög oldalainak hossza (a szokott jelölésekkel) $\boldsymbol{a,b,c}$ és $\boldsymbol{p}$ az $\boldsymbol{AC}$ oldal merőleges vetülete a $\boldsymbol{AB}$-re, akkor
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$.
Ha $\boldsymbol{ABC}$ tompaszögű háromszög oldalainak hossza (a szokott jelölésekkel) $\boldsymbol{a,b,c}$ és c a tompaszöggel szemközti oldal, valamint $\boldsymbol{p}$ az $\boldsymbol{AC}$ oldal merőleges vetülete a $\boldsymbol{AB}$-re, akkor
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ap$.

5.1.19. Ptolemaiosz-tétel

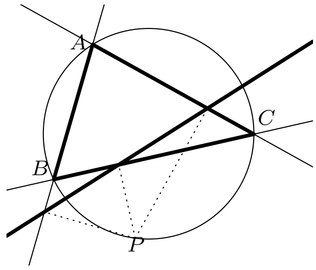


Az $\boldsymbol{ABCD}$ húrnégyszögben
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

5.1.20. Reuschle-tétel

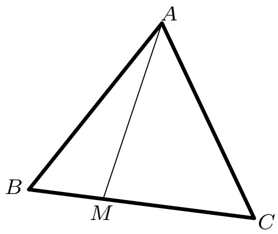
Az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög Ceva-féle $\boldsymbol{AA_1}$, $\boldsymbol{BB_1}$, $\boldsymbol{CC_1}$ szakaszaira, az $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ háromszög köré írt köre és az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ oldal $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{C_2}$ metszéspontjaira, az $\boldsymbol{AA_2}$, $\boldsymbol{BB_2}$, $\boldsymbol{CC_2}$ szakaszok egy ponton mennek át.

5.1.21. Simson-(Wallace) egyenes



Egy háromszög köré írt körének tetszőleges pontjának a háromszög oldalegyeneseire eső merőleges vetületei egy egyenesen vannak. Ez az egyenes a Simson-(Wallace) egyenes.

5.1.22. Stewart-tétel



Ha M az ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges belső pontja, akkor
$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC$

5.1.23. Varignon-tétel

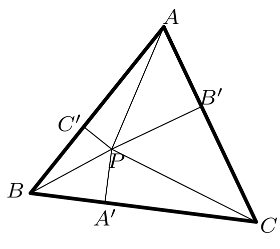
Tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg.

5.1.24. "Névtelen" állítások

1. Adott területű háromszögek közül a szabályos kerülete a legkisebb.
2. Adott kerületű háromszögek közül a szabályos területe a legnagyobb.
3. A háromszög hozzáírt körei középpontjai által meghatározott háromszög köré írható kör sugara 2R.
4. A háromszög hozzáírt körei középpontjai által meghatározott háromszög magasságpontja O, magasságvonalai pedig az eredeti háromszög szögfelezői.
5. A háromszög hozzáírt körei középpontjai által meghatározott háromszög csúcsai és I távolságát felezi a köré írt kör.
6. A háromszög hozzáírt körei középpontjai által meghatározott háromszög szögei: $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$
7. Ha valamely háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot alkotnak, akkor a kétszeres szögek színuszai is számtani sorozatot alkotnak.

5.2. Geometriai egyenlőtlenségek

5.2.1. Erdős-Mordell-egyenlőtlenség



Az ABC háromszögben egy tetszőleges belső P pontra, ahol P merőleges vetülete a BC oldalra A', az AC oldalra B', az AB oldalra C',

$$PA + PB + PC \geq 2\left(PA' + PB' + PC'\right)$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a=b=c és P a középpontja.

5.2.2. Euler-gyenlőtlenség

Minden háromszögben

$$R \geq 2r$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$

5.2.3. Háromszög egyenlőtlenség

Legyen a,b,c egy háromszög oldala, ekkor teljesülnek a

$$a + b > c \qquad b + c > a \qquad c + a > b$$

5.2.4. Mitrinovic-egyenlőtlenségg

Minden háromszögben

$$27r^2 \leq s^2 \leq \frac{27}{4}R^2$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a=b=c

5.2.5. Padoa-egyenlőtlenség

Legyen a,b,c egy háromszög oldala

$$abc \geq (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

azaz

$$abc \geq 8(s - a)(s - b)(s - c)$$

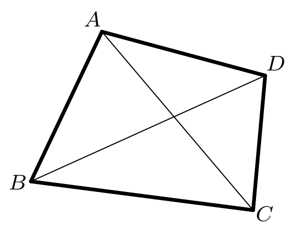
Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a=b=c

5.2.6. Ptolemaiosz-egyenlőtlenség

Az ABCD konvex négyszögben

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a négyszög húrnégyszög.



5.2.7. Weitzenböck-egyenlőtlenség

Minden háromszögben

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot T_{ABC}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a szögek megegyeznek, azaz a háromszög szabályos.

5.2.8. "Névtelen" egyenlőtlenségek

1. Hegyesszögű háromszögre: $s > 2R + r$
   Derékszögű háromszögre: $s = 2R + r$
   Tompaszögű háromszögre: $s < 2R + r$
2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \dfrac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
3. $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \dfrac{r^2}{2R^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
4. $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \dfrac{1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
5. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
6. $\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
7. $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$
8. $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
9. $a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
10. $r \le \dfrac{\sqrt{T_{ABC}\sqrt{3}}}{3} \le \dfrac{k\sqrt{3}}{4} \le \dfrac{R}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
11. $9r \le m_a + m_b + m_c \le f_a + f_b + f_c \le s_a + s_b + s_c \le \dfrac{9}{2}R \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
12. $27r^2 \le m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le f_a^2 + f_b^2 + f_c^2 \le s^2 \le s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 \le \dfrac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \le \dfrac{27}{4}R^2 \quad \Longleftrightarrow$
    $a = b = c$
13. $f_a + f_b + f_c \le r_a + r_b + r_c \le r + 4R \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
14. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_{cc}} \ge \dfrac{1}{f_a} + \dfrac{1}{f_b} + \dfrac{1}{f_c} \ge \dfrac{1}{s_a} + \dfrac{1}{s_b} + \dfrac{1}{s_c} \ge \dfrac{2}{R} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
15. $m_a + m_b + m_c \le 2R + 5r \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
16. $s^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
17. $r^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{12} - \dfrac{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
18. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma \cdot \sin\alpha} + \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \le 3 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
19. $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}^2\dfrac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{\gamma}{2} \cdot \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \ge \dfrac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$
20. $IS \le \sqrt{R \cdot (R - r)} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = c$

5.3. Háromszög

A geometria leírásához használt jelölések a szokásosak (A csúcsnál $\alpha\angle$, vele szemben a oldal található...), ettől eltérőek megtekinthetők a 7. oldalon.

5.3.1. Háromszögekre vonatkozó összefüggések

1. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$
2. $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$
3. $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$
4. $\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$
5. $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$
6. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$
7. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$
8. $a\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha=c$
9. $a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{c}$
10. $a\cdot\cos\alpha-b\cdot\cos\beta=\dfrac{b^2-a^2}{c}\cdot\cos\gamma$
11. $\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\sin\gamma$
12. $\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\dfrac{b\cdot c}{4\cdot R^2}$
13. $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=\dfrac{2}{R}\cdot T_{ABC}$
14. $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=\dfrac{2}{R}\cdot s\cdot r$
15. $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot R^2}$
16. $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=4\cdot R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
17. $-a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=4\cdot R\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$
18. $r=(s-a)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$
19. $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}$
20. $r=4\cdot R\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$
21. $s=4\cdot R\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$
22. $r_a=s\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$
23. $r_a=\sqrt{\dfrac{s\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s-a}}$

24. $r_a = 4 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$

25. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}$

26. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$

27. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$

28. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

29. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{s}{R}$

30. $-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

31. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

32. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}$

33. $\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma = 1 - 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

34. $\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma = 1 - \frac{r_a}{R}$

35. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

36. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$

37. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

38. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

39. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

40. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

41. $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2 + 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

42. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$

43. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$

44. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$

45. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

46. $a\cdot\operatorname{ctg}\alpha + b\cdot\operatorname{ctg}\beta + c\cdot\operatorname{ctg}\gamma = 2\cdot(4\cdot R + r)$

47. $4\cdot R^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = s^2 - (r + 2\cdot R)^2$

48. $b\cdot c\cdot\cos\alpha = s\cdot(s-a) - (s-b)\cdot(s-c)$

49. $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{a-b}{c}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$

50. $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{a+b}{c}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$

51. $a\cdot\cos(\beta-\gamma)=b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma$

52. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{s-c}{s}$

53. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{r^2}{(s-a)\cdot(s-b)}$

54. $b\cdot c=s\cdot(s-a)+(s-b)\cdot(s-c)$

55. $2\cdot R\cdot\cos\alpha=2\cdot R+r-r_a$

56. $b\cdot c=s^2+r_a^2-4\cdot R\cdot r_a$

57. $s^2=9\cdot r\cdot(2\cdot R-r)$

58. $s^2-a\cdot(b+c)=(s-a)^2$

59. $r_a\cdot r_b=s\cdot(s-c)$

60. $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=s^2+r^2+4\cdot R\cdot r$

61. $a^2+b^2+c^2=2\cdot s^2-2\cdot r^2-8\cdot R\cdot r$

62. $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=r^2+s^2+4\cdot R\cdot r$

63. $a^2+b^2+c^2=4\cdot T_{ABC}\cdot(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$

64. $a^3+b^3+c^3=2\cdot s\cdot\left(s^2-3\cdot r^2-6\cdot R\cdot r\right)$

65. $a^4+b^4+c^4=2\cdot\left(s^4-6\cdot r^2\cdot s^2-8\cdot s^2\cdot R\cdot r+8\cdot R\cdot r^3+16\cdot R^2\cdot r^2+r^4\right)$

66. $r_a+r_b+r_c=4\cdot R+r$

67. $r_a\cdot r_b\cdot r_c=s^2\cdot r$

68. $r_a\cdot r_b+r_b\cdot r_c+r_c\cdot r_a=s^2$

69. $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$

70. $\dfrac{1}{m_a}+\dfrac{1}{m_b}+\dfrac{1}{m_c}=\dfrac{1}{r}$

71. $a\cdot r_a+b\cdot r_b+c\cdot r_c=2\cdot s\cdot(2\cdot R-r)$

72. $(r_a+r_b)\cdot(r_b+r_c)\cdot(r_c+r_a)=4\cdot R\cdot s^2$

73. $(r_a-r)\cdot(r_b-r)\cdot(r_c-r)=4\cdot R\cdot r^2$

74. $\dfrac{1}{r_a^2}+\dfrac{1}{r_b^2}+\dfrac{1}{r_c^2}+\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{s^2\cdot r^2}$

75. $r\cdot(r_a+r_b)+r_ar_b=s^2-c^2$

76. $\dfrac{m_b+m_c}{r_a}+\dfrac{m_c+m_a}{r_b}+\dfrac{m_a+m_b}{r_c}=6$

77. $r_a \cdot (r_b + r_c) - r_b r_c = s \cdot (2 \cdot a - s)$

78. $r \cdot r_a = (s-b) \cdot (s-c)$

79. $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{m_a}$

80. $a \cdot r = (s-a) \cdot (r_a - r)$

81. $a \cdot r_a = s \cdot (r_a - r)$

82. $r_a \cdot r_b + r \cdot r_c = a \cdot b$

83. $m_a = \dfrac{2\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{a}$

84. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2 \cdot R - a}{2 \cdot R + a}$

85. $\cos\dfrac{\beta - \gamma}{2} = \dfrac{s}{2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} - \sin\dfrac{\alpha}{2}$

86. $\sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\beta \cdot \sin\gamma + \sin\gamma \cdot \sin\alpha = \dfrac{s^2 + r^2 + 4 \cdot r \cdot R}{4 \cdot R^2}$

87. $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \dfrac{s \cdot r}{2 \cdot R^2}$

88. $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\gamma \cdot \cos\alpha = \dfrac{s^2 + r^2}{4 \cdot R^2} - 1$

89. $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \dfrac{s^2 - (2 \cdot R + r)^2}{4 \cdot R^2}$

90. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{2 \cdot s \cdot r}{s^2 - (2 \cdot R + r)^2}$

91. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1 + \dfrac{4 \cdot R^2}{s^2 - (2 \cdot R + r)^2}$

92. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{2 \cdot s \cdot r}{s^2 - (2 \cdot R + r)^2}$

93. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r_a + r_b + r_c}{s}$

94. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{4 \cdot R + r}{s}$

95. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1$

96. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s}$

97. $\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma = 3 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} - \sin\dfrac{3\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{3\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{3\gamma}{2} + 1$

98. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2} = 1 - \dfrac{r}{2 \cdot R}$

99. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin^2\dfrac{\gamma}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2} \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{s^2 + r^2 - 8 \cdot R \cdot r}{16 \cdot R^2}$

100. $\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}=\left(\frac{r}{4\cdot R}\right)^2$

101. $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2+\frac{r}{2\cdot R}$

102. $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{s^2+r^2+8\cdot R\cdot r}{16\cdot R^2}$

103. $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}=\left(\frac{s}{4\cdot R}\right)^2$

104. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\left(\frac{4\cdot R+r}{s}\right)^2-2$

105. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2r^2+8\cdot R\cdot r}{s^2}$

106. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=\frac{s}{R}$

107. $\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta$

108. $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)=\frac{s^2+r^2+2\cdot R\cdot r}{8\cdot R^2}$

109. $a\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+b\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=2\cdot(2\cdot R-r)$

110. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}=\frac{AI+BI+CI-s}{r}$

111. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{4}=\frac{AI+BI+CI+s}{r}$

112. $AH^2\cdot\operatorname{tg}\alpha+BH^2\cdot\operatorname{tg}\beta+CH^2\cdot\operatorname{tg}\gamma=4\cdot s\cdot r$

113. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{f_a}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{f_b}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{f_c}$

114. $a\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+b\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+c\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}=s+\frac{T_{ABC}}{R}$

115. $(b+c)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+(c+a)\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+(a+b)\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}=3\cdot s$

116. $abc\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{c}\right)=s^2$

117. $\frac{a\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+b\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}=4\cdot R$

118. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

5.3.2. Háromszögek területképletei

1. $T_{ABC} = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$
2. $T_{ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$
3. $T_{ABC} = \dfrac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}$
4. $T_{ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$
5. $T_{ABC} = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$
6. $T_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot R^2 \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$
7. $T_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot R \cdot (a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma)$
8. $T_{ABC} = \sqrt{s \cdot abc \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}}$
9. $T_{ABC} = \dfrac{abc}{s} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$
10. $T_{ABC} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$
11. $T_{ABC} = s \cdot r$
12. $T_{ABC} = (s-a) \cdot r_a$
13. $T_{ABC} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$
14. $T_{ABC} = r^2 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$
15. $T_{ABC} = r^2 \cdot \left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\right)$
16. $T_{ABC} = s^2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$
17. $T_{ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot \left(a^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\beta + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma\right)$
18. $T_{ABC} = \dfrac{r^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$
19. $T_{ABC} = r_a^2 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$
20. $T_{ABC} = r_a^2 \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$
21. $T_{ABC}^2 = \dfrac{2}{9} \cdot \left(s_a^2 \cdot s_b^2 + s_b^2 \cdot s_c^2 + s_c^2 \cdot s_a^2\right) - \dfrac{1}{9} \cdot \left(s_a^4 + s_b^4 + s_c^4\right)$
22. $\dfrac{1}{T_{ABC}^2} = \left(\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{m_a} - \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} - \dfrac{1}{m_c}\right)$

23. $T_{ABC}^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

5.3.3. Háromszög nevezetes pontjainak távolsága

1. $s_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2\cdot b^2 + 2\cdot c^2 - a^2}}{2}$
2. $4\cdot\left(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2\right) = 3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)$
3. $f_a = \frac{2\cdot b\cdot c}{b+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$
4. $f_a = \frac{2\cdot b\cdot c}{b+c}\sqrt{\frac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$
5. $f_a = \sqrt{b\cdot c\cdot\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)}$
6. $f_a' = \frac{2\cdot b\cdot c}{b-c}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$
7. $f_a' = \frac{2\cdot b\cdot c}{b-c}\sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}$
8. $OI^2 = R^2 - 2\cdot R\cdot r$
9. $OI^2 = R^2\cdot\left(1 - 8\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)$
10. $OI_a^2 = R^2 + 2\cdot R\cdot r_a$
11. $OH^2 = 9\cdot R^2 - 2\cdot\left(s^2 - r^2 - 4\cdot R\cdot r\right)$
12. $OS^2 = R^2 - \frac{2}{9}\cdot\left(s^2 - r^2 - 4\cdot R\cdot r\right)$
13. $OH = 3\cdot OS$
14. $HI^2 = 2\cdot r^2 - 4\cdot R^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$
15. $HI^2 = 4\cdot R^2 + 4\cdot R\cdot e + 3\cdot r^2 - s^2$
16. $HI^2 = 9\cdot R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right)$
17. $HI_a^2 = 2\cdot r_a^2 - 4\cdot R^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$
18. $\frac{a}{AH} + \frac{b}{BH} + \frac{c}{CH} = \frac{a}{AH}\cdot\frac{b}{BH}\cdot\frac{c}{CH}$
19. $IS^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(s^2 + 5\cdot r^2 - 16\cdot R\cdot r\right)$
20. $IS^2 = R^2 - \frac{1}{9}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)$

21. $IA \cdot IB \cdot IC = 4 \cdot r^2 \cdot R$
22. $a \cdot AI^2 + b \cdot BI^2 + c \cdot CI^2 = abc$
23. $a \cdot AI^2 + b \cdot BI^2 + c \cdot CI^2 = 4 \cdot R \cdot r \cdot s$
24. $AI^2 + BI^2 + CI^2 = s^2 + r^2 - 8 \cdot R \cdot r$
25. $AS^2 + BS^2 + CS^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(s^2 - r^2 - 4 \cdot R \cdot r\right)$
26. $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = (a+b+c) \cdot PI^2 + abc$, P tetszőleges pont
27. $3 \cdot \left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) = 9 \cdot PS^2 + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, P tetszőleges pont

5.4. Trigonometria

5.4.1. Trigonometrikus összefüggések

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
2. $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$
3. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
4. $\sin 3\alpha = 3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha$
5. $\sin 3\alpha = 4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(60^o + \alpha) \cdot \sin(60^o - \alpha)$
6. $\sin 4\alpha = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 4 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^3\alpha$
7. $\sin 5\alpha = 5 \cdot \cos^4\alpha \cdot \sin\alpha - 10 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^3\alpha + \sin^5\alpha$
8. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
9. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$
10. $\cos 2\alpha = \cos^2 a - \sin^2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha$
11. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = 4 \cdot \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha$
12. $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^4\alpha - 6 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$
13. $\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin^2\alpha + 5 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^4\alpha$
14. $\mathrm{tg}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$
15. $\mathrm{tg}\ (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot \mathrm{tg}\,\gamma}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\beta \cdot \mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}$
16. $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
17. $\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha}$
18. $\mathrm{ctg}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$
19. $\mathrm{ctg}\ (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma - \mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\gamma}{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma + \mathrm{ctg}\,\gamma \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha - 1}$

20. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}$

21. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{3 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

22. $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$

23. $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$

24. $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$

25. $\cos\alpha - \cos\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$

26. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

27. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

28. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\quad$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

29. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\quad$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

30. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

31. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

32. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$

33. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin^2\alpha$

34. $\dfrac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = 2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$

35. $1 = \sin^6\alpha + 3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^6\alpha$

36. $\sin^3\alpha \cdot (1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha \cdot (1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$

37. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$

38. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

39. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$

40. $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

41. $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

42. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

43. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

44. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

45. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

46. $1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos\alpha}$

47. $1 \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

48. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \pm 1 = \dfrac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

49. $4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

50. $4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma = \cos(-\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta - \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)$

51. $4 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = -\sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

52. $4 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos(-\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)$

5.4.2. Szögek pontos trigonometrikus értékei

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
7,5°	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$
9°	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{11+4\sqrt{5}-2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}$	$\sqrt{11+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22,5°	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
27°	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{11-4\sqrt{5}-2\sqrt{50-22\sqrt{5}}}$	$\sqrt{11-4\sqrt{5}+2\sqrt{50-22\sqrt{5}}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
37,5°	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
52,5°	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
54°	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
63°	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{11-4\sqrt{5}+2\sqrt{50-22\sqrt{5}}}$	$\sqrt{11-4\sqrt{5}-2\sqrt{50-22\sqrt{5}}}$
67,5°	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
81°	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$	$\sqrt{11+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}$	$\sqrt{11+4\sqrt{5}-2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}$
82,5°	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

5.4.3. Trigonometrikus értékek sorozata

A táblázatot függőlegesen kell nézni, az egymás alatti értékek alkotnak "furcsa" sorozatot!

sin	Mintázat 1	Mintázat 2	Mintázat 3	cos
0°	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{4}}}{2} = 0$		**90°**
9°			$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}{2}$	**81°**
15°		$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$		**75°**
18°			$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}{2}$	**72°**
22,5°		$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$		**67,5°**
27°			$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}{2}$	**63°**
30°	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{1}}}{2} = \frac{1}{2}$		**60°**
36°			$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}{2}$	**54°**
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{0}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$		**45°**
54°			$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}{2}$	**36**
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{1}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		**30°**
63°			$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}{2}$	**27°**
67,5°		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$		**22,5°**
72°			$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}{2}$	**18°**
75°		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$		**15°**
81°			$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}{2}$	**9°**
90°	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{4}}}{2} = 1$		**0°**
	$\frac{\sqrt{n}}{2}$	$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{n}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}}}}{2}$	

5.4.4. Trigonometrikus összegek

1. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+...+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)-\dfrac{cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

2. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+...+\cos n\alpha=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$

3. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+...+\sin(\alpha+(n-1)\beta)=\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\cdot\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$

4. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\cdot\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$

5. $\sin\alpha+2\cdot\sin 2\alpha+3\cdot\sin 3\alpha+...+n\cdot\sin n\alpha=\dfrac{sin\,(n+1)\,\alpha}{4sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\dfrac{(n+1)\,cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

6. $\cos\alpha+2\cdot\cos 2\alpha+3\cdot\cos 3\alpha+...+n\cdot\cos n\alpha=\dfrac{(n+1)\,sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\dfrac{cos\,(n+1)\,\alpha-1}{4sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=$
$=\dfrac{n\cdot\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{n}{2}\alpha}{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

7. $\mathrm{tg}\,\alpha+\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{1}{8}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\cdot\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2^n}-2\cdot\mathrm{ctg}\,2\alpha$

5.5. Vektorok

5.5.1. Háromszög egyenlőtlenségek

1. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$

2. $|\vec{a}|\le\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|$

3. $\left|\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+|\vec{a}|$

4. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$

5.5.2. Háromszög

Legyenek az ABC háromszög oldalai a,b,c. A sík tetszőleges O pontjából a csúcsokba mutató vektorok rendre $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Súlypont A súlypontba mutató vektor:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

Magasságpont A magasságpontba mutató vektor:

$$\vec{I}=\frac{\vec{a}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha+\vec{b}\cdot\mathrm{tg}\,\beta+\vec{c}\cdot\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma}$$

Körülírt kör középpontja A körülírt kör középpontjába mutató vektor:

$$\vec{O}=\frac{\vec{a}\cdot\sin 2\alpha+\vec{b}\cdot\sin 2\beta+\vec{c}\cdot\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}$$

Beírt kör középpontja A beírt kör középpontjába mutató vektor:

$$\vec{I}=\frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}$$

5.5.3. Négyszög

A sík tetszőleges O pontjából a csúcsokba mutató vektorok rendre $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.

Súlypont A súlypontba mutató vektor:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

Súlypont A szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok felezik egymást, metszéspontjuk a súlypont, azaz az ide mutató vektor:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

Súlypont Az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja a súlypont, azaz az ide mutató vektor:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

6. Gráfelmélet

6.1. Gráf 52
6.1.1. Csúcs 52
6.1.2. Él 52
6.1.3. Fok 52
6.2. Alapfogalmak 52
6.2.1. Bináris kódfa, döntési fa 52
6.2.2. Egyszerű gráf 52
6.2.3. Elsőfokú faktor 53
6.2.4. Erősen összefüggő irányított gráf 53
6.2.5. Euler-vonal 53
6.2.6. Hamilton-út 53
6.2.7. Hamilton-kör 53
6.2.8. Hurokél 53
6.2.9. Irányított gráf 53
6.2.10. Izomorf gráfok 53
6.2.11. Klikk 53
6.2.12. Komplementer gráf 53
6.2.13. Összefüggő gráf 53
6.2.14. Páros gráf 53
6.2.15. Súlyozott gráf 54
6.2.16. Szomszédos csúcs 54
6.2.17. Szomszédos él 54
6.2.18. Teljes gráf 54
6.2.19. Többszörös él 54
6.2.20. Véges gráf 54
6.2.21. Vonal 54
6.2.22. Út 54
6.3. Tételek 54
6.3.1. Cayley tétel 54
6.3.2. Erdős-Szekeres tétel 54
6.3.3. Kőnig Dénes tétele 54
6.3.4. Ramsey tétele 55
6.3.5. Turán-tétel egyszerű formája . . 55
6.4. ,,Névtelen” tételek, állítások 55
6.5. Speciális gráfok 56
6.5.1. Grötzsch gráf 56
6.5.2. Petersen gráf 56
6.5.3. Teljes gráf 56
6.5.4. Teljes páros gráf 56

6.1. Gráf

Gráfnak nevezzük pontoknak és a pontok közötti szakaszoknak, éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik. A gráf megengedi, hogy tetszőleges szándékolt jelentést tulajdonítsunk a csúcsoknak és éleknek.

6.1.1. Csúcs

A gráfok pontjait egyszerűen pontoknak, vagy csúcspontoknak, vagy csúcsoknak nevezzük.

6.1.2. Él

A pontokat összekötő szakaszokat éleknek nevezzük.

6.1.3. Fok

Egy adott csúcsból kiinduló élek száma.

6.2. Alapfogalmak

6.2.1. Bináris kódfa, döntési fa

Az olyan rendezett fát, amelyben minden csúcs fokszáma legfeljebb kettő, bináris (kód)fának nevezzük.

6.2.2. Egyszerű gráf

A gráf egyszerű, ha irányítatlan, nincs benne hurokél és többszörös él.

6.2.3. Elsőfokú faktor

Az olyan teljes páros (rész)gráfot nevezzük a gráf elsőfokú faktorának, amelyben minden pont fokszáma 1. vagy: A G gráf elsőfokú faktora az az összes csúcspontot lefedő független élrendszer (közös pont nélküli élhalmaz), amelynek minden éle G-ből való.

6.2.4. Erősen összefüggő irányított gráf

Bármelyik 2 pont között oda is és vissza is van irányított út.

6.2.5. Euler-vonal

A gráf minden élét tartalmazó vonalat Euler-vonalnak nevezzük. Az Euler-vonal zárt, ha az Euler-vonal kiindulási és érkezési csúcsa ugyanaz, nyílt, ha ez nem teljesül.

6.2.6. Hamilton-út

A gráf összes csúcsát tartalmazó utat Hamilton-útnak nevezzük.

6.2.7. Hamilton-kör

A gráf összes csúcsát tartalmazó kört Hamilton-körnek nevezzük.

6.2.8. Hurokél

Ha egy él mindkét végpontja ugyanaz a pont, akkor hurokélről beszélünk.

6.2.9. Irányított gráf

A gráf irányított, ha a kapcsolatok nem szimmetrikusak,

6.2.10. Izomorf gráfok

A G és a G' gráfot akkor mondjuk izomorfnak, ha van a csúcsaik között egy-egyértelmű leképezés, amely élt élbe, nem-élt nem-élbe visz. Vagyis megszámozhatók a csúcsaik pl. az $1, 2, ..., n$ számokkal úgy, hogy az i-edik és j-edik pont az egyikben pontosan akkor van összekötve, ha a másikban is össze van kötve.

6.2.11. Klikk

A klikk olyan részgráf, aminek bármely két pontja között van él. Másképpen egy olyan részgráf, ami teljes gráf. A klikk csúcsainak számát a klikk méretének vagy rendjének is mondják. A k csúcsú klikket röviden k-klikknek is nevezik.

6.2.12. Komplementer gráf

A G egyszerű gráf komplementere az az egyszerű gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.

6.2.13. Összefüggő gráf

A gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely más pontjába élek mentén el lehet jutni.

6.2.14. Páros gráf

Olyan irányítás nélküli gráf, amelynek csúcsai két (A és B), diszjunkt halmazra bonthatók, és él csak a két különböző halmaz csúcsai között mehet, azonos halmazban lévő csúcsok között nem.

6.2.15. Súlyozott gráf

Súlyozott gráfban a gráf minden éléhez számértéket rendelünk, az él súlyát. Az élsúlyok legtöbbször valós számok, de adott esetben szorítkozhatunk racionális vagy egész számokra is. A (rész)gráf költsége az élek súlyának összege.

6.2.16. Szomszédos csúcs

A gráf két csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha van közös élük.

6.2.17. Szomszédos él

A gráf két élét szomszédosnak nevezzük, ha van közös csúcspontjuk.

6.2.18. Teljes gráf

Az olyan gráfot nevezzük teljes gráfnak, amelyben minden A-beli pont össze van kötve minden A-beli ponttal.

6.2.19. Többszörös él

Ha két csúcs (pont) között több él húzódik, akkor párhuzamos, vagy másképp többszörös élről beszélünk.

6.2.20. Véges gráf

A gráf véges, ha véges sok csúcsa van.

6.2.21. Vonal

Vonalnak nevezzük a gráf csúcsainak és éleinek azt a sorát, amelyben az élek a megfelelő csúcsokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek.

6.2.22. Út

Útnak nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

6.3. Tételek

6.3.1. Cayley tétel

Az n pontú gráf számozott fáinak száma: n^{n-2}

6.3.2. Erdős-Szekeres tétel

Ha k és l pozitív egész számok, és G egy $N = \binom{k+l-2}{k-1}$ szögpontú gráf, akkor G tartalmaz teljes k szögpontú részgráfot, vagy G tartalmaz teljes l szögpontú részgráfot.

6.3.3. Kőnig Dénes tétele

Ha egy páros gráfban minden pont foka ugyanaz a k szám, akkor éleit k színnel ki tudjuk színezni úgy, hogy egy pontból sem indul ki két azonos színű él.

6.3.4. Ramsey tétele

Bármely k és l egész számhoz létezik olyan f egész szám, hogy bármely legalább f szögpontú G gráfra igaz a következő állítás: vagy G tartalmaz teljes k pontú részgráfot, vagy tartalmaz teljes l pontú részgráfot.

6.3.5. Turán-tétel egyszerű formája

Ha egy n csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz p-klikket, akkor az e éleinek a száma legfeljebb:

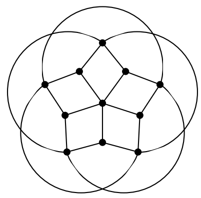
$$e \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$$

6.4. „Névtelen” tételek, állítások

1. Ha egy egyszerű gráf csúcsainak száma páratlan, akkor van olyan csúcsa, amelynek fokszáma páros.
2. Véges egyszerű gráfban a fokszámok összege páros.
3. Véges egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának duplája.
4. Véges egyszerű gráfnak van két azonos fokú csúcsa.
5. Bármely véges egyszerű gráfra igaz, hogy vagy a gráf vagy a komplementere összefüggő.
6. A véges egyszerű n pontú fagráfra vonatkozó alábbi tulajdonságok ekvivalensek:
   (a) A gráf összefüggő és $n-1$ éle van;
   (b) A gráf összefüggő és nincs benne kör;
   (c) A gráfban nincs kör, de bármelyik él behúzása kört eredményez;
   (d) A gráf bármely két csúcsa pontosan egyféleképpen köthető össze úttal.
7. Ha egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának fokszáma legalább k, akkor van a gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör.
8. Egy n pontú irányított teljes gráfnak van olyan A pontja, hogy a gráf összes többi B pontjához vezet A-ból B-be legfeljebb 2 hosszúságú irányított út.
9. A teljes irányított gráfban mindig létezik olyan irányított út, amely minden csúcson átmegy.
10. Egy gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha nincs benne páratlan hosszúságú kör.
11. Ha egy gráf összefüggő és minden pontja másodfokú, akkor az kör.
12. Ha egy páros gráf minden pontjának ugyanannyi a foka, és legalább egy, akkor kiválasztható belőle egy elsőfokú faktor.
13. Euler-vonal létezése összefüggő gráf esetén
    (a) Van zárt Euler-vonala, ha a gráf minden pontjának fokszáma páros.
    (b) Van nyílt Euler-vonala, ha a gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van.
14. Ha egy G egyszerű gráfban bármely két különböző csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van, akkor van olyan csúcs amely minden más csúccsal össze van kötve, és a gráf úgy néz ki, hogy k darab háromszögnek van egy közös csúcsa, ahol $n = 2k + 1$ a gráf csúcsainak száma. (Barátság-tétel)

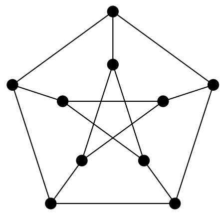
6.5. Speciális gráfok

6.5.1. Grötzsch gráf



A Grötzsch-gráf egy háromszögmentes gráf.
11 csúcsa és 20 éle van.

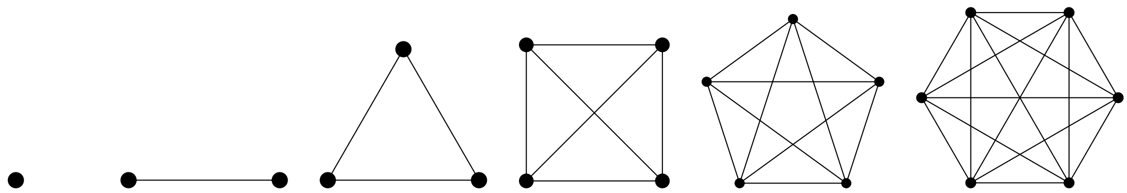
6.5.2. Petersen gráf



A Petersen-gráf egy nevezetes speciális gráf. Nagyon gyakran bukkan fel a gráfelméletben különféle állítások ellenpéldájaként.
10 csúcsa és 15 éle van.

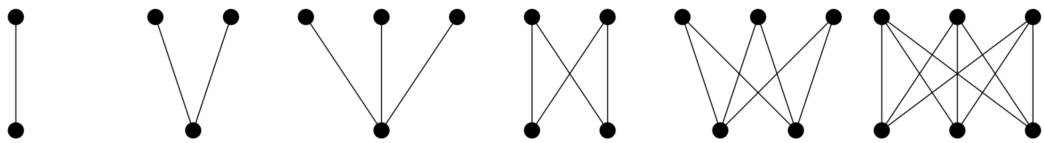
Egy példa: a Petersen-gráf lerajzolható a síkban úgy, hogy minden él hossza egység hosszúságú (itt a rajzon nem ilyen).

6.5.3. Teljes gráf



K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
1 pont, 0 él	2 pont, 1 él	3 pont, 3 él	4 pont, 6 él	5 pont, 10 él	6 pont, 15 él

6.5.4. Teljes páros gráf



$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{1,3}$	$K_{2,2}$	$K_{2,3}$	$K_{3,3}$
2 pont, 1 él	3 pont, 2 él	4 pont, 3 él	4 pont, 4 él	5 pont, 6 él	6 pont, 9 él

7. Nevezetes számok

7.1. Konstansok 57
7.1.1. Konstans: e ≈ 2,7182818. 57
7.1.2. Konstans: $\phi \approx$ 1,61803398874. . . (aranymetszés) 57
7.1.3. Konstans: $\pi \approx$ 3,1415926. 58
7.2. Binomiális együtthatók 59
7.2.1. Pascal háromszög 59
7.2.2. Összefüggések 59
7.3. Catalan számok 60
7.3.1. Catalan háromszög 60
7.3.2. Összefüggések 60
7.4. Fibonacci számok 61
7.4.1. Összefüggések 61
7.5. Ramsey számok 62
7.5.1. Két halmazra: $R(m;n)$ 62
7.5.2. Értékek két halmazra 62
7.5.3. Három halmazra: $R(m;n,p)$ . . 62

7.1. Konstansok

7.1.1. Konstans: e ≈ 2,7182818. . .

Euler szám (Napier-állandónak is nevezik John Napier skót matematikusnak, a logaritmusfüggvény megalkotójának tiszteletére)

$$e \approx 2.7182818\dots$$

(További adatok: ⇒ 70. oldal)

Kiszámítás

1. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2. $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
3. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$

7.1.2. Konstans: $\phi \approx$ 1,61803398874. . . (aranymetszés)

Két rész az aranymetszés szerint aránylik egymáshoz, ha az összegük úgy aránylik a nagyobbik részhez, ahogy a nagyobbik rész a kisebbik részhez.

$$\phi \approx 1,61803398874\dots$$

(További adatok: ⇒ 70. oldal)

Kiszámítás

1. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2. $\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}}}$

7.1.3. Konstans: $\pi \approx$ 3,1415926...

A görög π betű a „$\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$” (perimetrosz, azaz kerület) szót rövidíti. Ezt a jelölést először William Jones használta 1707-ben (Ludolph-féle számnak is nevezik)

$$\pi \approx 3,1415926\cdots \approx \frac{22}{7} \approx \frac{377}{120}$$

(További adatok: $\Rightarrow$ 70. oldal)

Kiszámítás

1. Vičte-féle sor: $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}...$
2. Leibniz-féle sor: $\dfrac{\pi}{4} = arc\ tg1 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + ...$
3. Wallis-formula: $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{6}{7}.......$
4. Machin-formula: $\dfrac{\pi}{4} = 4 \cdot arc\ tg\, \dfrac{1}{5} - arc\ tg\, \dfrac{1}{239}$
5. Euler-féle sor: $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + ...$
6. $\dfrac{\pi^2}{24} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} + ...$
7. $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{9^2} + ...$
8. Euler-féle sor: $\dfrac{\pi^4}{90} = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{5^4} + ...$
9. $\dfrac{\pi^4}{1440} = \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{6^4} + \dfrac{1}{8^4} + ...$
10. $\dfrac{\pi^4}{96} = 1 + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \dfrac{1}{7^4} + \dfrac{1}{9^4} + ...$
11. Euler-féle sor: $\dfrac{\pi^6}{945} = 1 + \dfrac{1}{2^6} + \dfrac{1}{3^6} + \dfrac{1}{4^6} + \dfrac{1}{5^6} + ...$
12. Euler-féle sor: $\dfrac{\pi^8}{9450} = 1 + \dfrac{1}{2^8} + \dfrac{1}{3^8} + \dfrac{1}{4^8} + \dfrac{1}{5^8} + ...$
13. Euler-féle sor: $\dfrac{\pi^{10}}{93555} = 1 + \dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{3^{10}} + \dfrac{1}{4^{10}} + \dfrac{1}{5^{10}} + ...$
14. Brouncker lánctörtje: $\dfrac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + ...}}}}$
15. Bailey-Borwein-Plouffe formula: $\pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$

7.2. Binomiális együtthatók

7.2.1. Pascal háromszög

0					**1**				
1				**1**		**1**			
2			**1**		**2**		**1**		
3		**1**		**3**		**3**		**1**	
4	**1**		**4**		**6**		**4**		**1**

(További adatok: ⇒ 73. oldal)

7.2.2. Összefüggések

1. $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$
2. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$
3. $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$
5. $\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \binom{n}{3}a^{n-3} + ... + \binom{n}{n} = (a+1)^n$
6. $\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n}b^n = (a+b)^n$
7. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + .. (-1)^n\binom{n}{n} = 0$
8. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$
9. $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$
10. $\binom{k}{0}\binom{n}{r} + \binom{k}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{k}{2}\binom{n}{r-2} + ... + \binom{k}{r}\binom{n}{0} = \binom{k+n}{r}$
11. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{3} + ... + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$
12. $\binom{n}{q}\binom{q}{q} + \binom{n}{q+1}\binom{q+1}{q} + \binom{n}{q+2}\binom{q+2}{q} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{q} = 2^{n-q}\binom{n}{q}$
13. $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + ... + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$
14. $0^2 \cdot \binom{n}{0} + 1^2 \cdot \binom{n}{1} + 2^2 \cdot \binom{n}{2} + 3^2 \cdot \binom{n}{3} + ... + n^2 \cdot \binom{n}{n} = \left(n^2+n\right) \cdot 2^{n-1}$

15. $0 \cdot \binom{n}{0}^2 + 1 \cdot \binom{n}{1}^2 + 2 \cdot \binom{n}{2}^2 + 3 \cdot \binom{n}{3}^2 + ... + n \cdot \binom{n}{n}^2 = \frac{n}{2} \cdot \binom{2n}{n}$

16. $0^2 \cdot \binom{n}{0}^2 + 1^2 \cdot \binom{n}{1}^2 + 2^2 \cdot \binom{n}{2}^2 + 3^2 \cdot \binom{n}{3}^2 + ... + n^2 \cdot \binom{n}{n}^2 = n^2 \cdot \binom{2n-2}{n-1}$

17. $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + ... = F_{n+1}$ (F_n Fibonacci szám)

18. $\binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \binom{n-3}{m-3} + ... + \binom{n-m}{0} = \binom{n+1}{m}$

19. $\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \binom{r+2}{2} + \binom{r+3}{3} + ... + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{m}$

7.3. Catalan számok

$$C_0 = 1; \qquad C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ...C_{n-1}C_0$$
$$\mathrm{C_n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$
$$C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14, \cdots$$

(További adatok: ⇒ 74. oldal)

7.3.1. Catalan háromszög

Minden sor eggyel több számot tartalmaz. A szám a felette levő sorban addigi pozícióig levő számok összege.

1				
1	**1**			
1	**2**	**2**		
1	**3**	**5**	**5**	
1	**4**	**9**	**14**	**14**

(További adatok: ⇒ 74. oldal)

7.3.2. Összefüggések

1. $\mathrm{C_n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$

2. $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$

3. $C_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$

4. $\mathrm{C_n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

5. $C_n = \dfrac{2(2n-1)}{n+2} C_{n-1}$

6. $\begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} & C_{n+2} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} \\ C_{n+2} & C_{n+3} & C_{n+4} \end{vmatrix} = 1$

7. $\begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} & C_{n+4} \\ C_{n+2} & C_{n+3} & C_{n+4} & C_{n+5} \\ C_{n+3} & C_{n+4} & C_{n+5} & C_{n+6} \end{vmatrix} = 1$

8. $\begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{n+k} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \cdots & C_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n+k} & C_{n+k+1} & \cdots & C_{n+2k} \end{vmatrix} = 1 \qquad k \geq 2; \quad k \in \mathbb{N}$

7.4. Fibonacci számok

$$F_1 = 1; \qquad F_2 = 1; \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$F_1 = 1;\ F_2 = 1;\ F_3 = 2;\ F_4 = 3;\ F_5 = 5; \cdots$$

(További adatok: ⇒ 75. oldal)

7.4.1. Összefüggések

1. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$
3. $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
4. $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
5. $1 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + 3 \cdot F_3 + ... + n \cdot F_n = n \cdot F_{n+2} - F_{n+3} + 2$
6. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
7. $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$
8. $F_n^2 - F_{n-r} \cdot F_{n+r} = (-1)^{n-2} F_r^2$
9. $F_m \cdot F_{n+1} - F_{m+1} \cdot F_n = (-1)^n F_{n-m}$
10. $F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n = F_{n+m}$
11. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n-1}$
12. $F_n (F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n}$
13. $2F_n^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1} = F_{3n}$

14. $5F_n^3 + 3(-1)^n F_n = F_{3n}$

15. $F_{n+1}^3 + 3F_n^2 F_{n+1} - F_n^3 = F_{3n+1}$

16. $F_{n+1}^3 + 3F_n F_{n+1}^2 + F_n^3 = F_{3n+2}$

17. $4F_n F_{n+1}\left(F_{n+1}^2 + 2F_n^2\right) - 3F_n^2\left(F_n^2 + 2F_{n+1}^2\right)$

7.5. Ramsey számok

7.5.1. Két halmazra: $R(m;n)$

1. $R(m;n) = R(n;m)$
2. $R(1;n) = 1$
3. $R(2;n) = n$
4. $R(k+1;l+1) \leq R(k+1;l+R(k;l+1))$

7.5.2. Értékek két halmazra

R	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	6	9

(További adatok: ⇒ 79. oldal)

7.5.3. Három halmazra: $R(m;n,p)$

1. $R(k;l;m) = R(k;m;l) = R(l;k;m)$
2. $R(2;2;k) = k$
3. $R(k;l;2) = R(k;l)$
4. $R(k;l;m) \leq 3^{k+l+m}$

8. Számelmélet

8.1. Oszthatósági szabályok 63
8.1.1. Szokásos szabályok 2-től 63
8.1.2. Nem szokásos szabályok 3-tól, az utolsó jegyekkel 64
8.2. Osztási maradékok 65
8.2.1. Négyzetszámok maradékai 65
8.2.2. Köbszámok maradékai 65
8.2.3. Negyedik hatványok maradékai . 65
8.3. Pitagoraszi számhármasok 66
8.3.1. Általános megoldás 66
8.3.2. Megoldások 20-ig 66
8.4. Számelméleti függvények 66
8.4.1. Euler féle $\varphi(n)$ 66
8.4.2. Osztók összege $\sigma(n)$ 67
8.4.3. Osztók száma $d(n)$ 67
8.5. Számelméleti tételek 67
8.5.1. Bezout-tétel 67
8.5.2. Bertrand-tétel 67
8.5.3. Catalan-sejtés 67
8.5.4. Egészrész és törtrész azonosságok 67
8.5.5. Euler-Fermat-tétel 68
8.5.6. kis Fermat-tétel 68
8.5.7. LTE (Lifting The Exponent) tétel 68
8.5.8. Legendre-tétel 68
8.5.9. Mihăilescu-tétel 69
8.5.10. Osztók száma 69
8.5.11. Polinom 69
8.5.12. Wilson-tétel 69
8.5.13. Wolstenholme-tételek 69

8.1. Oszthatósági szabályok

8.1.1. Szokásos szabályok 2-től

Az oszthatósági szabályokban "A"' jelenti több számjegy összességét, "a_i" pedig az egyes jegyeket.

2-es $2|\overline{Aa} \Leftrightarrow 2|a \Rightarrow a \in \{0;2;4;6;8\}$

3-as $3|\overline{a_n a_{n-1} ... a_0} \Leftrightarrow 3|a_n + a_{n-1} + ... + a_0$

4-es $4|\overline{Aa_1a_0} \Leftrightarrow 4|\overline{a_1a_0}$

5-ös $5|\overline{Aa} \Leftrightarrow 5|a \Rightarrow a \in \{0;5\}$

6-os $6|\overline{A} \Leftrightarrow 2|\overline{A}$ és $3|\overline{A}$

7-es 1. $7|\overline{Aa} \Leftrightarrow 7|\overline{A} - 2 \cdot a$

2. $7|\overline{a_n ... a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} \Leftrightarrow (..., 2, 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1)$

$\Leftrightarrow 7|1 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 1 \cdot a_3 - 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_5 + 1 \cdot a_6 + 3 \cdot a_7 + ...$

8-as $8|\overline{Aa_2a_1a_0} \Leftrightarrow 8|\overline{a_2a_1a_0}$

9-es $9|\overline{a_n a_{n-1} ... a_0} \Leftrightarrow 9|a_n + a_{n-1} + ... + a_0$

10-es 1. $10|\overline{Aa} \Leftrightarrow 10|a \Rightarrow a \in \{0\}$

2. $10|\overline{A} \Leftrightarrow 2|\overline{A}$ és $5|\overline{A}$

11-es $11|\overline{a_n a_{n-1} ... a_0} \Leftrightarrow 11|a_n - a_{n-1} + ... (-1)^n a_0$

12-es $12|\overline{A} \Leftrightarrow 3|\overline{A}$ és $4|\overline{A}$

16-os $16|\overline{Aa_3a_2a_1a_0} \Leftrightarrow 16|\overline{a_3a_2a_1a_0}$

25-ös $25|\overline{Aa_1a_0} \Leftrightarrow 25|\overline{a_1a_0} \Rightarrow \overline{a_1a_0} \in \{00;25;50;75\}$

32-es $32|\overline{Aa_4a_3a_2a_1a_0} \Leftrightarrow 32|\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$

100-as $100|\overline{Aa_1a_0} \Leftrightarrow 100|\overline{a_1a_0} \Rightarrow \overline{a_1a_0} \in \{00\}$

125-ös $125|\overline{Aa_2a_1a_0} \Leftrightarrow 125|\overline{a_2a_1a_0}$

8.1.2. Nem szokásos szabályok 3-tól, az utolsó jegyekkel

A táblázat alkalmazásához nézzük a 19-es sor 3 jegy oszlopban álló 8-at. A szabály:

$$19|\overline{Aa_2a_1a_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad 19|A + 8 \cdot \overline{a_2a_1a_0}$$

Egy konkrét példán:

$$19|3000100 \qquad \Leftrightarrow \qquad 19|3000 + 8 \cdot 100 = 3800$$

Szám	**1 jegy**	**2 jegy**	**3 jegy**	**4 jegy**	**5 jegy**
3	1	1	1	1	1
7	-2	-3	-1	2	3
9	1	1	1	1	1
11	-1	1	-1	1	-1
13	4	3	-1	-4	-3
17	-5	8	-6	-4	3
19	2	4	8	-3	-6
21	-2	4	-8	-5	10
23	7	3	-2	9	-6
27	-8	10	1	-8	10
29	3	9	-2	-6	11
31	-3	9	4	-12	5
33	10	1	10	1	10
37	-11	10	1	-11	10
39	4	16	-14	-17	10
41	-4	16	16	10	1
43	13	-3	4	9	-12
47	-14	8	-18	17	-3
49	5	-24	-22	-12	-11
51	-5	25	-23	13	-14
53	16	-9	15	-25	24
57	-17	4	-11	16	13
59	6	-23	-20	-2	-12
61	-6	-25	28	15	-29
63	19	-17	-8	-26	10

8.2. Osztási maradékok

8.2.1. Négyzetszámok maradékai

Csak olyan modulus maradékait soroljuk fel, amelyek érdekesek:

modulo 3	$0; 1$	**modulo 12**	$0; 1; 4; 9$
modulo 4	$0; 1$	**modulo 13**	$0; 1; 3; 4; 9; 10; 12$
modulo 5	$0; 1; 4$	**modulo 14**	$0; 1; 2; 4; 7; 8; 9; 11$
modulo 6	$0; 1; 3; 4$	**modulo 15**	$0; 1; 4; 6; 9; 10$
modulo 7	$0; 1; 2; 4$	**modulo 16**	$0; 1; 4; 9$
modulo 8	$0; 1; 4$	**modulo 17**	$0; 1; 2; 4; 8; 9; 13; 16$
modulo 9	$0; 1; 4; 7$	**modulo 18**	$0; 1; 4; 7; 9; 10; 13; 16$
modulo 10	$0; 1; 4; 5; 6; 9$	**modulo 19**	$0; 1; 4; 5; 6; 7; 9; 16$
modulo 11	$0; 1; 3; 4; 5; 9$	**modulo 20**	$0; 1; 4; 5; 9; 16$

8.2.2. Köbszámok maradékai

Csak olyan modulus maradékait soroljuk fel, amelyek érdekesek:

modulo 4	$0; 1; 3$	**modulo 13**	$0; 1; 3; 5; 8; 12$
modulo 7	$0; 1; 6$	**modulo 14**	$0; 1; 6; 7; 8; 13$
modulo 8	$0; 1; 3; 5; 7$	**modulo 16**	$0; 1; 3; 5; 7; 8; 9; 11; 13; 15$
modulo 9	$0; 1; 8$	**modulo 18**	$0; 1; 8; 9; 10; 17$
modulo 12	$0; 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11$	**modulo 19**	$0; 1; 7; 8; 11; 12; 18$
		modulo 21	$0; 1; 6; 7; 8; 13; 14; 15; 20$

8.2.3. Negyedik hatványok maradékai

Csak olyan modulus maradékait soroljuk fel, amelyek érdekesek:

modulo 3	$0; 1$	**modulo 9**	$0; 1; 4; 7$
modulo 4	$0; 1$	**modulo 10**	$0; 1; 5; 6$
modulo 5	$0; 1$	**modulo 11**	$0; 1; 3; 4; 5; 9$
modulo 6	$0; 1; 3; 4$	**modulo 12**	$0; 1; 4; 9$
modulo 7	$0; 1; 2; 4$	**modulo 13**	$0; 1; 3; 9$
modulo 8	$0; 1$	**modulo 15**	$0; 1; 6; 10$

8.3. Pitagoraszi számhármasok

8.3.1. Általános megoldás

Az $x^2+y^2=z^2$ alakú Diofantoszi egyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} x &= k\left(a^2-b^2\right) \\ y &= 2abk \\ z &= k\left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} k &\in \mathbb{N}^+ \\ a,b &\in \mathbb{N}^+ \\ a &> b \\ a &\not\equiv b \pmod 2 \end{aligned}$$

8.3.2. Megoldások 20-ig

A felsorolásban a nem primitív számhármasok után a három szám legnagyobb közös osztója is szerepel.

$(3;4;5)$	$(9;12;15)$ /3	$(12;35;37)$	$(15;112;113)$	$(18;80;82)$ /2
$(5;12;13)$	$(9;40;41)$	$(13;84;85)$	$(16;30;34)$ /2	$(19;180;181)$
$(6;8;10)$ /2	$(10;24;26)$ /2	$(14;48;50)$ /2	$(16;63;65)$	$(20;21;29)$
$(7;24;25)$	$(11;60;61)$	$(15;20;25)$ /5	$(17;144;145)$	$(20;48;52)$ /4
$(8;15;17)$	$(12;16;20)$ /4	$(15;36;39)$ /3	$(18;24;30)$ /6	$(20;99;101)$

(További adatok: ⇒ 78. oldal)

8.4. Számelméleti függvények

8.4.1. Euler féle $\varphi(n)$

Az ***n*** pozitív egész nála nem nagyobb, hozzá relatív prím pozitív egészek száma

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{\substack{d\le n \\ (n;d)=1}} 1 \\ n &= p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n} \qquad \varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \\ (a;b) &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b) \\ \varphi(n) &= n-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad n\in\mathbb{P} \end{aligned}$$

8.4.2. Osztók összege $\sigma(n)$

Az $\boldsymbol{n}$ pozitív egész pozitív osztóinak összege

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{d|n} d \\ n &= p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n} \qquad \sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot....\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1} \\ (a;b) &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)\end{aligned}$$

8.4.3. Osztók száma $d(n)$

Az $\boldsymbol{n}$ pozitív egész pozitív osztóinak száma

$$\begin{aligned}d(n) &= \sum_{d|n} 1 \\ n &= p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n} \qquad d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1) \\ (a;b) &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad d(ab)=d(a)\cdot d(b) \\ d(n) &\equiv 1 \pmod 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad n=a^2\end{aligned}$$

8.5. Számelméleti tételek

8.5.1. Bezout-tétel

$$\exists x,y\in\mathbb{Z}\quad ax+by=(a;b)\,, valamintax+by\in\{k(a;b)\,|k\in\mathbb{Z}\}$$

8.5.2. Bertrand-tétel

$$\forall n\in\mathbb{N}^+;\quad \exists p\in\mathbb{P};\quad n\le p<2n$$

8.5.3. Catalan-sejtés

Lásd a Mihăilescu-tételt a 8.5.9 pontnál.

8.5.4. Egészrész és törtrész azonosságok

1. **Hermite azonosság**

   $$[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right] \qquad [3x]=[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right] \qquad [nx]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{m}\right]$$

2. $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$

3. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right] \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$

4. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{9n+7}\right] \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$

5. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}\right]=\left[\sqrt{9n+17}\right] \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$

6. $\left[\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\ldots+\sqrt{n^2+2n}\right]=2n^2+2n \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$

8.5.5. Euler-Fermat-tétel

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m \qquad (a;m)=1$$

8.5.6. kis Fermat-tétel

$$a^p\equiv a \pmod p \qquad p\in\mathbb{P}$$

8.5.7. LTE (Lifting The Exponent) tétel

Jelöljön p egy prím számot és legyen x és y két (nem szükségszerűen pozitív) egész szám, amelyek nem oszthatóJak p-vel, (azaz $x\nmid p$ és $y\nmid p$). Ekkor:

a) Ha n pozitív egész
- Ha $p\neq 2$ és $p\mid x-y$, akkor

$$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y)+v_p(n).$$

- Ha $p=2$ és $4|x-y$, akkor

$$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(n).$$

- Ha $p=2$ és $2|x-y$, akkor

$$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(x+y)+v_2(n)-1.$$

b) Ha n pozitív páratlan egész és $p|x+y$, akkor

$$v_p(x^n+y^n)=v_p(x+y)+v_p(n).$$

c) Ha n pozitív egész és $(p,n)=1$, akkor

$$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y).$$

és ha n pozitív páratlan egész és $(p,n)=1$, akkor

$$v_p(x^n+y^n)=v_p(x+y).$$

ahol $v_p(n)=k$ azt jelenti, hogy $p^k\mid n$ de $p^{k+1}\nmid n$.

8.5.8. Legendre-tétel

Ha $p|n$, akkor

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

az a legnagyobb kitevő, melyre

$$p^\alpha|n$$

8.5.9. Mihăilescu-tétel

Az $x^n - y^m = 1$ diophantoszi egyenletnek – $x, y, n, m > 1$ egész számok – csak a

$$3^2 - 2^3 = 1$$

megoldása van.

8.5.10. Osztók száma

$$d(n) \leq 2\sqrt{n}$$

8.5.11. Polinom

$$a \equiv b \pmod p \quad \Rightarrow \quad f(a) \equiv f(b) \pmod p$$

8.5.12. Wilson-tétel

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p \qquad p \in \mathbb{P}$$

8.5.13. Wolstenholme-tételek

1. $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3} \qquad p \in \mathbb{P} \geq 5$
2. $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-1} \qquad (m;n) = 1; \;\; p \in \mathbb{P} \geq 5 \qquad \Rightarrow \qquad p^2 | m$

9. Táblázatok

9.1. Konstansok 70
9.1.1. e 100 tizedesre 70
9.1.2. $\frac{1}{e}$ 100 tizedesre 70
9.1.3. ϕ 100 tizedesre 70
9.1.4. $\frac{1}{\phi}$ 100 tizedesre 70
9.1.5. π 100 tizedesre 70
9.1.6. π^2 100 tizedesre 71
9.1.7. $\frac{1}{\pi}$ 100 tizedesre 71
9.1.8. $\sqrt{2}$ 100 tizedesre 71
9.1.9. $\sqrt{3}$ 100 tizedesre 71
9.2. Dátumok, évszámok 71
9.2.1. Évszámok prímfelbontása 71
9.3. Prímek 8110-ig 72
9.4. Binomiális együtthatók 73
9.4.1. Pascal háromszög 73
9.4.2. Speciális binomiális együtthatók 73
9.5. Catalan számok 74
9.5.1. Catalan háromszög 74
9.5.2. Az első 60 Catalan szám 74
9.6. Fibonacci számok 75
9.6.1. Az első 30 Fibonacci szám prímfelbontása 75
9.6.2. Az első 60 Fibonacci szám 75
9.7. Pell egyenlet 76
9.7.1. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$ . . . 76
9.7.2. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = 1$ . . . 77
9.8. Pitagoraszi számhármasok 78
9.8.1. Számhármasok 203-ig 78
9.9. Ramsey számok 79
9.9.1. Ramsey számok két halmazra . . 79

9.1. Konstansok

9.1.1. e 100 tizedesre

$e = 2,$ 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274

9.1.2. $\frac{1}{e}$ 100 tizedesre

$\frac{1}{e} = 0,$ 36787 94411 71442 32159 55237 70161 46086 74458 11131 03176 78345 07836 80169 74614 95744 89980 33571 47274 34591 96437 46

9.1.3. ϕ 100 tizedesre

$\phi = 1,$ 61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374

9.1.4. $\frac{1}{\phi}$ 100 tizedesre

$\frac{1}{\phi} = 0,$ 61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374 84

9.1.5. π 100 tizedesre

$\pi = 3,$ 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82

9.1.6. π^2 100 tizedesre

$\pi^2 = 9,$ 86960 44010 89358 61883 44909 99876 15113 53136 99407 24079 06264 13349 37622 00448 22419 20524 30017 73403 71855 22318 24

9.1.7. $\frac{1}{\pi}$ 100 tizedesre

$\frac{1}{\pi} = 0,$ 31830 98861 83790 67153 77675 26745 02872 40689 19291 48091 28974 95334 68811 77935 95268 45307 01802 27605 53250 61719 12

9.1.8. $\sqrt{2}$ 100 tizedesre

$\sqrt{2} = 1,$ 41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 80731 76679 73799 07324 78462 10703 88503 87534 32764 15727 35

9.1.9. $\sqrt{3}$ 100 tizedesre

$\sqrt{3} = 1,$ 73205 08075 68877 29352 74463 41505 87236 69428 05253 81038 06280 55806 97945 19330 16908 80003 70811 46186 75724 85756 75

9.2. Dátumok, évszámok

9.2.1. Évszámok prímfelbontása

1990 =	$2\cdot5\cdot199$	2002 =	$2\cdot7\cdot11\cdot13$	2014 =	$2\cdot19\cdot53$
1991 =	$11\cdot181$	2003 =	2003	2015 =	$5\cdot13\cdot31$
1992 =	$2^3\cdot3\cdot83$	2004 =	$2^2\cdot3\cdot167$	2016 =	$2^5\cdot3^2\cdot7$
1993 =	1993	2005 =	$5\cdot401$	2017 =	2017
1994 =	$2\cdot997$	2006 =	$2\cdot17\cdot59$	2018 =	$2\cdot1009$
1995 =	$3\cdot5\cdot7\cdot19$	2007 =	$3^2\cdot223$	2019 =	$3\cdot673$
1996 =	$2^2\cdot499$	2008 =	$2^3\cdot251$	2020 =	$2^2\cdot5\cdot101$
1997 =	1997	2009 =	$7^2\cdot41$	2021 =	$43\cdot47$
1998 =	$2\cdot3^3\cdot37$	2010 =	$2\cdot3\cdot5\cdot67$	2022 =	$2\cdot3\cdot337$
1999 =	1999	2011 =	2011	2023 =	$7\cdot17^2$
2000 =	$2^4\cdot5^3$	2012 =	$2^2\cdot503$	2024 =	$2^3\cdot11\cdot23$
2001 =	$3\cdot23\cdot29$	2013 =	$3\cdot11\cdot61$	2025 =	$3^4\cdot5^2$

9.3. Prímek 8110-ig

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137
139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271
277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431
433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593
599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751
757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929
937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063 1069
1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223
1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373
1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511
1523 1531 1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657
1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811
1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987
1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129
2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207 2213 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287
2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423
2437 2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591 2593 2609 2617
2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 2741
2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797 2801 2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903
2909 2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079
3083 3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257
3259 3271 3299 3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413
3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571
3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659 3671 3673 3677 3691 3697 3701 3709 3719 3727
3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823 3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907
3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027 4049 4051 4057
4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 4129 4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231
4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297 4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409
4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513 4517 4519 4523 4547 4549 4561 4567 4583
4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751
4759 4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4831 4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937
4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987 4993 4999 5003 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087
5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153 5167 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279
5281 5297 5303 5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437 5441 5443
5449 5471 5477 5479 5483 5501 5503 5507 5519 5521 5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639
5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669 5683 5689 5693 5701 5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791
5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851 5857 5861 5867 5869 5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939
5953 5981 5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053 6067 6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131 6133
6143 6151 6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301
6311 6317 6323 6329 6337 6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449 6451 6469 6473
6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571 6577 6581 6599 6607 6619 6637 6653 6659 6661 6673
6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763 6779 6781 6791 6793 6803 6823 6827 6829 6833
6841 6857 6863 6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917 6947 6949 6959 6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997
7001 7013 7019 7027 7039 7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151 7159 7177 7187 7193 7207
7211 7213 7219 7229 7237 7243 7247 7253 7283 7297 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351 7369 7393 7411
7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489 7499 7507 7517 7523 7529 7537 7541 7547 7549 7559 7561
7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643 7649 7669 7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723
7727 7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829 7841 7853 7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919
7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993 8009 8011 8017 8039 8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101

9.4. Binomiális együtthatók

9.4.1. Pascal háromszög

A pascal háromszögnek csak a felét közöljük, hiszen a szimmetria miatt a másik fele”kitalálható”.

0	1										
1	1	1									
2	2	1									
3	3	3	1								
4	6	4	1								
5	10	10	5	1							
6	20	15	6	1							
7	35	35	21	7	1						
8	70	56	28	8	1						
9	126	126	84	36	9	1					
10	252	210	120	45	10	1					
11	462	462	330	165	55	11	1				
12	924	792	495	220	66	12	1				
13	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
14	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1			
15	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1		
16	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1		
17	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1	
18	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
19	92375	92375	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

9.4.2. Speciális binomiális együtthatók

$\binom{2n}{n}$ alakú számok és prímfelbontásuk.

$\binom{2}{1} = 2 = 2$

$\binom{4}{2} = 6 = 2 \cdot 3$

$\binom{6}{3} = 20 = 2^2 \cdot 5$

$\binom{8}{4} = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

$\binom{10}{5} = 252 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$\binom{12}{6} = 924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

$\binom{14}{7} = 3432 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$

$\binom{16}{8} = 12870 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$

$\binom{18}{9} = 48620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$

$\binom{20}{10} = 184756 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

9.5. Catalan számok

9.5.1. Catalan háromszög

Minden sor eggyel több számot tartalmaz. A szám a felette levő sorban addigi pozícióig levő számok összege.

1								
1	**1**							
1	**2**	**2**						
1	**3**	**5**	**5**					
1	**4**	**9**	**14**	**14**				
1	**5**	**14**	**28**	**42**	**42**			
1	**6**	**20**	**48**	**90**	**132**	**132**		
1	**7**	**27**	**75**	**165**	**297**	**429**	**429**	
1	**8**	**35**	**110**	**275**	**572**	**1001**	**1430**	**1430**

9.5.2. Az első 60 Catalan szám

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$C_3 = 5$

$C_4 = 14$

$C_5 = 42$

$C_6 = 132$

$C_7 = 429$

$C_8 = 1430$

$C_9 = 4862$

$C_{10} = 16796$

$C_{11} = 58786$

$C_{12} = 208012$

$C_{13} = 742900$

$C_{14} = 2674440$

$C_{15} = 9694845$

$C_{16} = 35357670$

$C_{17} = 129644790$

$C_{18} = 477638700$

$C_{19} = 1767263190$

$C_{20} = 6564120420$

$C_{21} = 24466267020$

$C_{22} = 91482563640$

$C_{23} = 343059613650$

$C_{24} = 1289904147324$

$C_{25} = 4861946401452$

$C_{26} = 18367353072152$

$C_{27} = 69533550916004$

$C_{28} = 263747951750360$

$C_{29} = 1002242216651368$

$C_{30} = 3814986502092304$

$C_{31} = 14544636039226909$

$C_{32} = 55534064877048198$

$C_{33} = 212336130412243110$

$C_{34} = 812944042149730764$

$C_{35} = 3116285494907301262$

$C_{36} = 11959798385860453492$

$C_{37} = 45950804324621742364$

$C_{38} = 176733862787006701400$

$C_{39} = 680425371729975800390$

$C_{40} = 2622127042276492108820$

$C_{41} = 10113918591637898134020$

$C_{42} = 39044429911904443959240$

$C_{43} = 150853479205085351660700$

$C_{44} = 583300119592996693088040$

$C_{45} = 2257117854077248073253720$

$C_{46} = 8740328711533173390046320$

$C_{47} = 33868773757191046886429490$

$C_{48} = 131327898242169365477991900$

$C_{49} = 509552245179617138054608572$

$C_{50} = 1978261657756160653623774456$

$C_{51} = 7684785670514316385230816156$

$C_{52} = 2986916694577262595014241751 2$

$C_{53} = 11615787145578243425055384588 0$

$C_{54} = 45195971802795347144760950942 4$

$C_{55} = 175941461660881887099247987597 2$

$C_{56} = 685245692784487349754965846431 2$

$C_{57} = 267009528567748519042452209126 64$

$C_{58} = 104088460289122304033498318812 080$

$C_{59} = 405944995127576985730643443367 112$

$C_{60} = 158385096459612004268677277903 8896$

9.6. Fibonacci számok

9.6.1. Az első 30 Fibonacci szám prímfelbontása

$F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$F_3 = 2$

$F_4 = 3$

$F_5 = 5$

$F_6 = 8 = 2^3$

$F_7 = 13$

$F_8 = 21 = 3 \cdot 7$

$F_9 = 34 = 2 \cdot 17$

$F_{10} = 55 = 5 \cdot 11$

$F_{11} = 89$

$F_{12} = 144 = 2^4 \cdot 3^2$

$F_{13} = 233$

$F_{14} = 377 = 13 \cdot 29$

$F_{15} = 610 = 2 \cdot 5 \cdot 61$

$F_{16} = 987 = 3 \cdot 7 \cdot 47$

$F_{17} = 1597$

$F_{18} = 2584 = 2^3 \cdot 17 \cdot 19$

$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$

$F_{20} = 6765 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 41$

$F_{21} = 10946 = 2 \cdot 13 \cdot 421$

$F_{22} = 17711 = 89 \cdot 199$

$F_{23} = 28657$

$F_{24} = 46368 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$

$F_{25} = 75025 = 5^2 \cdot 3001$

$F_{26} = 121393 = 233 \cdot 521$

$F_{27} = 196418 = 2 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 109$

$F_{28} = 317811 = 3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281$

$F_{29} = 514229$

$F_{30} = 832040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$

9.6.2. Az első 60 Fibonacci szám

Az első 30 Fibonacci szám az előző pontnál (⇒ 9.6.1) látható.

$F_{31} = 1346269$

$F_{32} = 2178309$

$F_{33} = 3524578$

$F_{34} = 5702887$

$F_{35} = 9227465$

$F_{36} = 14930352$

$F_{37} = 24157817$

$F_{38} = 39088169$

$F_{39} = 63245986$

$F_{40} = 102334155$

$F_{41} = 165580141$

$F_{42} = 267914296$

$F_{43} = 433494437$

$F_{44} = 701408733$

$F_{45} = 1134903170$

$F_{46} = 1836311903$

$F_{47} = 2971215073$

$F_{48} = 4807526976$

$F_{49} = 7778742049$

$F_{50} = 12586269025$

$F_{51} = 20365011074$

$F_{52} = 32951280099$

$F_{53} = 53316291173$

$F_{54} = 86267571272$

$F_{55} = 139583862445$

$F_{56} = 225851433717$

$F_{57} = 365435296162$

$F_{58} = 591286729879$

$F_{59} = 956722026041$

$F_{60} = 1548008755920$

9.7. Pell egyenlet

9.7.1. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = k$

D	**k**							
	-4	**-3**	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**4**
2	$(2;2)$		$(4;3)$	$(1;1)$	$(3;2)$	$(2;1)$		$(6;4)$
3		$(3;2)$	$(1;1)$		$(2;1)$			$(4;2)$
5	$(1;1)$			$(2;1)$	$(9;4)$			$(3;1)$
6			$(2;1)$		$(5;2)$		$(3;1)$	$(10;4)$
7		$(2;1)$			$(8;3)$	$(3;1)$		$(16;6)$
8	$(2;1)$				$(3;1)$			$(7;2)$
10	$(6;2)$			$(3;1)$	$(19;6)$			$(38;12)$
11			$(3;1)$		$(10;3)$			$(20;6)$
12		$(3;1)$			$(7;2)$			$(4;1)$
13	$(3;1)$	$(4;2)$		$(18;5)$	$(649;180)$		$(4;1)$	$(119;33)$
14					$(15;4)$	$(4;1)$		$(30;8)$
15					$(4;1)$			$(8;2)$
17	$(8;2)$			$(4;1)$	$(33;8)$			$(66;16)$
18			$(4;1)$		$(17;4)$			$(34;8)$
19		$(4;1)$	$(13;3)$		$(170;39)$			
20	$(4;1)$				$(9;2)$			$(18;4)$
21		$(9;2)$			$(55;13)$			$(5;1)$
22			$(14;3)$		$(197;42)$		$(5;1)$	

9.7.2. Pell egyenlet: $x^2 - Dy^2 = 1$

D	x	y	D	x	y	D	x	y
2	3	2	38	37	6	70	251	30
3	2	1	39	25	4	71	3480	413
5	9	4	40	19	3	72	17	2
6	5	2	41	2049	320	73	2281249	267000
7	8	3	42	13	2	74	3699	430
8	3	1	43	3482	531	75	26	3
10	19	6	44	199	30	76	57799	6630
11	10	3	45	161	24	77	351	40
12	7	2	46	24335	3588	78	53	6
13	649	180	47	48	7	79	80	9
14	15	4	48	7	1	80	9	1
15	4	1	50	99	14	82	163	18
17	33	8	D	x	y	83	82	9
18	17	4	51	50	7	84	55	6
19	170	39	52	649	90	85	285769	30996
20	9	2	53	66249	9100	86	10405	1122
21	55	12	54	485	66	87	28	3
22	197	42	55	89	12	88	197	21
23	24	5	56	15	2	89	500001	53000
24	5	1	57	151	20	90	19	2
26	51	10	58	19603	2574	91	1574	165
27	26	5	59	530	69	92	1151	120
28	127	24	60	31	4	93	12151	1260
29	9801	1820	61	1766319049	226153980	94	2143295	221064
30	11	2	62	63	8	95	39	4
31	1520	273	63	8	1	96	49	5
32	17	3	65	129	16	97	62809633	6377352
33	23	4	66	65	8	98	99	10
34	35	6	67	48842	5967	99	10	1
35	6	1	68	33	4	101	201	20
37	73	12	69	7775	936	102	101	10

9.8. Pitagoraszi számhármasok

9.8.1. Számhármasok 203-ig

A számhármasok közül csak a primitívek szerepelnek.

(3; 4; 5)
(5; 12; 13)
(7; 24; 25)
(8; 15; 17)
(9; 40; 41)
(11; 60; 61)
(12; 35; 37)
(13; 84; 85)
(15; 112; 113)
(16; 63; 65)
(17; 144; 145)
(19; 180; 181)
(20; 21; 29)
(20; 99; 101)
(21; 220; 221)
(23; 264; 265)
(24; 143; 145)
(25; 312; 313)
(27; 364; 365)
(28; 45; 53)
(28; 195; 197)
(29; 420; 421)
(31; 480; 481)
(32; 255; 257)
(33; 56; 65)
(33; 544; 545)
(35; 612; 613)
(36; 77; 85)
(36; 323; 325)
(37; 684; 685)
(39; 80; 89)
(39; 760; 761)
(40; 399; 401)
(41; 840; 841)
(43; 924; 925)
(44; 117; 125)
(44; 483; 485)
(45; 1012; 1013)
(47; 1104; 1105)
(48; 55; 73)
(48; 575; 577)
(49; 1200; 1201)
(51; 140; 149)
(51; 1300; 1301)
(52; 165; 173)
(52; 675; 677)
(53; 1404; 1405)
(55; 1512; 1513)
(56; 783; 785)
(57; 176; 185)
(57; 1624; 1625)
(59; 1740; 1741)
(60; 91; 109)
(60; 221; 229)
(60; 899; 901)
(61; 1860; 1861)
(63; 1984; 1985)
(64; 1023; 1025)
(65; 72; 97)
(65; 2112; 2113)
(67; 2244; 2245)
(68; 285; 293)
(68; 1155; 1157)
(69; 260; 269)
(69; 2380; 2381)
(71; 2520; 2521)
(72; 1295; 1297)
(73; 2664; 2665)
(75; 308; 317)
(75; 2812; 2813)
(76; 357; 365)
(76; 1443; 1445)
(77; 2964; 2965)
(79; 3120; 3121)
(80; 1599; 1601)
(81; 3280; 3281)
(83; 3444; 3445)
(84; 187; 205)
(84; 437; 445)
(84; 1763; 1765)
(85; 132; 157)
(85; 3612; 3613)
(87; 416; 425)
(87; 3784; 3785)
(88; 105; 137)
(88; 1935; 1937)
(89; 3960; 3961)
(91; 4140; 4141)
(92; 525; 533)
(92; 2115; 2117)
(93; 476; 485)
(93; 4324; 4325)
(95; 168; 193)
(95; 4512; 4513)
(96; 247; 265)
(96; 2303; 2305)
(97; 4704; 4705)
(99; 4900; 4901)
(100; 621; 629)
(100; 2499; 2501)
(101; 5100; 5101)
(103; 5304; 5305)
(104; 153; 185)
(104; 2703; 2705)
(105; 208; 233)
(105; 608; 617)
(105; 5512; 5513)
(107; 5724; 5725)
(108; 725; 733)
(108; 2915; 2917)
(109; 5940; 5941)
(111; 680; 689)
(111; 6160; 6161)
(112; 3135; 3137)
(113; 6384; 6385)
(115; 252; 277)
(115; 6612; 6613)
(116; 837; 845)
(116; 3363; 3365)
(117; 6844; 6845)
(119; 120; 169)
(119; 7080; 7081)
(120; 209; 241)
(120; 391; 409)
(120; 3599; 3601)
(121; 7320; 7321)
(123; 836; 845)
(123; 7564; 7565)
(124; 957; 965)
(124; 3843; 3845)
(125; 7812; 7813)
(127; 8064; 8065)
(128; 4095; 4097)
(129; 920; 929)
(129; 8320; 8321)
(131; 8580; 8581)
(132; 475; 493)
(132; 1085; 1093)
(132; 4355; 4357)
(133; 156; 205)
(133; 8844; 8845)
(135; 352; 377)
(135; 9112; 9113)
(136; 273; 305)
(136; 4623; 4625)
(137; 9384; 9385)
(139; 9660; 9661)
(140; 171; 221)
(140; 1221; 1229)
(140; 4899; 4901)
(141; 1100; 1109)
(141; 9940; 9941)
(143; 10224; 10225)
(144; 5183; 5185)
(145; 408; 433)
(145; 10512; 10513)
(147; 1196; 1205)
(147; 10804; 10805)
(148; 1365; 1373)
(148; 5475; 5477)
(149; 11100; 11101)
(151; 11400; 11401)
(152; 345; 377)
(152; 5775; 5777)
(153; 11704; 11705)
(155; 468; 493)
(155; 12012; 12013)
(156; 667; 685)
(156; 1517; 1525)
(156; 6083; 6085)
(157; 12324; 12325)
(159; 1400; 1409)
(159; 12640; 12641)
(160; 231; 281)
(160; 6399; 6401)
(161; 240; 289)
(161; 12960; 12961)
(163; 13284; 13285)
(164; 1677; 1685)
(164; 6723; 6725)
(165; 532; 557)
(165; 1508; 1517)
(165; 13612; 13613)
(167; 13944; 13945)
(168; 425; 457)
(168; 775; 793)
(168; 7055; 7057)
(169; 14280; 14281)
(171; 14620; 14621)
(172; 1845; 1853)
(172; 7395; 7397)
(173; 14964; 14965)
(175; 288; 337)
(175; 15312; 15313)
(176; 7743; 7745)
(177; 1736; 1745)
(177; 15664; 15665)
(179; 16020; 16021)
(180; 299; 349)
(180; 2021; 2029)
(180; 8099; 8101)
(181; 16380; 16381)
(183; 1856; 1865)
(183; 16744; 16745)
(184; 513; 545)
(184; 8463; 8465)
(185; 672; 697)
(185; 17112; 17113)
(187; 17484; 17485)
(188; 2205; 2213)
(188; 8835; 8837)
(189; 340; 389)
(189; 17860; 17861)
(191; 18240; 18241)
(192; 1015; 1033)
(192; 9215; 9217)
(193; 18624; 18625)
(195; 748; 773)
(195; 2108; 2117)
(195; 19012; 19013)
(196; 2397; 2405)
(196; 9603; 9605)
(197; 19404; 19405)
(199; 19800; 19801)
(200; 609; 641)
(200; 9999; 10001)
(201; 2240; 2249)
(201; 20200; 20201)
(203; 396; 445)
(203; 20604; 20605)

9.9. Ramsey számok

9.9.1. Ramsey számok két halmazra

R	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40-43
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84	73-115	92-149
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	125-316	143-442
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	127–495	169–780	179–1171
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205–540	216–1031	216–1031	289–2826
8	1	8	28	56-84	101-216	127–495	216–1031	282–1870	317–3583	?$\sim$ 6090
9	1	9	36	73-115	125-316	169–780	216–1031	317–3583	565–6588	565–6588
10	1	10	40-43	92-149	143-442	179–1171	289–2826	? $\sim$ 6090	565–6588	565–6588

10. Referencia

A felhasznált összefüggések származási helyei, hibák jelzői és módosítások javaslói:

- Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek
  MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1995
- Art of Problem Solving
  http://www.artofproblemsolving.com/
- Fridrik Richárd, Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet
- Halász Tamás, Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium
- Hojoo Lee: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques
  http://www.normalesup.org/ kortchem/olympiades/Cours/Inegalites/tin2006.pdf
- Katz Sándor, Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium
- Kovács Márton, Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium
- Kubatov Antal, Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium
- Lányi Vera, Pécsi Janus Pannonius Gimnázium
- Lévai Miklós, Tatai Református Gimnázium
- Nagy Piroska Mária, Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium
- I. Niven - H. S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe
  Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 10978
- Pék Ákos, Szombathely
- Reiman István: Geometria és határterületei
  Szalay Könyvkiadó és Könyvkereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999.
- Reiman István, Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003
  Typotex, Budapest, 2003.
- Róka Sándor, Nyíregyházi Főiskola
- Samin Riasat: Basics of Olympiad Inequalities
  http://sriasat.wordpress.com/notes-and-articles/basic/
- Thamó Emese, University of Cambridge, (Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium)
- Williams Kada, Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium

Ezúton is (ismételten) köszönöm a munkájukat és segítségüket.

Tárgymutató

A

Algebra, 10
Algebrai azonosságok, 10
  Binom, trinom, ..., 12
  Harmadfokú, két változó, 11
  Harmadfokú, több változó, 11
  Másodfokú, két változó, 10
  Másodfokú, több változó, 10
  Magasabb fokú, 12
Alkalmazott jelölések, 7
  Egyebek, 9
  Geometria, 7
  Háromszög beírt kör, 8
  Háromszög félkerülete, 7
  Háromszög köré írt kör, 7
  Háromszög magasság, 8
  Háromszög magasságpont, 8
  Háromszög súlypont, 8
  Háromszög súlyvonal, 8
  Halmazok, 7
Antiszimmetrikus egyenlet, 20

B

Bernoulli-egyenlőtlenségek, 22
Bertrand-tétel, 67
Bezout-tétel, 67
Bijektív függvény, 7
Binomiális együtthatók, 59
  Összefüggések, 59
  Pascal háromszög, 59, 73
  Specilis számok, 73
Brahmagupta-tétel, 29
Bretschneider-tételek, 29
Brianchon-tétel, 30

C

Cardano-képlet, 17
Carleman-egyenlőtlenség, 22
Catalan számok, 60
  Az első 60 szám, 74
  Catalan háromszög, 60, 74
  Összefüggések, 60
Catalan-sejtés, 67
Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség
  Engel forma, 23
  Titu lemma, 23
Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségek, 23
Cayley tétel, 54
Ceva-tétel, 30
Csebisev-egyenlőtlenség, 23

D

Desargues-tétel, 30
Descartes-tétel, 31

E

Egészrész, 67
Egyenlőtlenségek, *lásd* Nevezetes egyenlőtlenségek
Egyenlőtlenségek megoldása
  Algebrai helyettesítések, 28
  Ismert egyenlőtlenségek, 27
  Trigonometrikus helyettesítések, 28
Egyenletek általános megoldása, 16
  Egyenletek racionális gyökei, 16
  Horner elrendezés, 17
  Viète formulák, 16
Egyenletek racionális gyökei, 16
Erdős-Mordell-egyenlőtlenség, 34
Erdős-Szekeres tétel, 54
Euler féle $\varphi(n)$, 66
Euler-egyenes, 31
Euler-egyenlőtlenség, 35
Euler-Fermat-tétel, 68
EV-egyenlőtlenség, 23
Évszámok, 71

F

Függvény
  Bijektív, 7
  Injektív, 7
  Konkáv, 7
  Konvex, 7
  Szürjektív, 7
Félkerület
  Háromszög, 7
Feuerbach-kör, 31
Feuerbach-tétel, 31
Fibonacci szám
  Prímfelbontása, 75
Fibonacci számok, 61
  Az első 60 szám, 75
  Összefüggések, 61

G

Geometria, 29
  Alkalmazott jelölések, 7

Háromszög, 36
Geometriai egyenlőtlenségek, 34
Erdős-Mordell-egyenlőtlenség, 34
Euler-egyenlőtlenség, 35
Háromszög egyenlőtlenség, 35
Mitrinovic-egyenlőtlenség, 35
"Névtelen" egyenlőtlenségek, 36
Padoa-egyenlőtlenség, 35
Ptolemaiosz-egyenlőtlenség, 35
Weitzenböck-egyenlőtlenség, 35
Geometriai tételek, 29
Brahmagupta-tétel, 29
Bretschneider-tételek, 29
Brianchon-tétel, 30
Ceva-tétel, 30
Desargues-tétel, 30
Descartes-tétel, 31
Euler-egyenes, 31
Feuerbach-kör, 31
Feuerbach-tétel, 31
Gergonne-pont, 32
Kotangens-trükk', 32
Menelaosz-tétel, 32
Morley-tétel, 32
"Névtelen" állítások, 34
Nagel-pont, 32
Pappos-tétel, 33
Pascal-tétel, 33
Pitagorasz-tétel, általánosítás, 33
Ptolemaiosz-tétel, 33
Reuschle-tétel, 33
Simson-egyenes, 34
Stewart-tétel, 34
Varignon-tétel, 34
Wallace-egyenes, 34
Gergonne-pont, 32
Gráfelmélet, 52
,,Névtelen" tételek, állítások, 55
Alapfogalmak, 52
Cayley tétel, 54
Erdős-Szekeres tétel, 54
Gráf, 52
Kőnig Dénes tétel, 54
Ramsey tétel, 55
Turán tétel 2., 55
Gráfelméleti tételek, 54

H

Hölder-egyenlőtlenségek, 24
Háromszög
Beírt kör, 8
félkerület, 7
Köré írt kör, 7
Magasság, 8
Magasságpont, 8
Nevezetes pontjainak távolsága, 43
Ortocentrum, 8
Összefüggések, 37
Súlypont, 8
Súlyvonal, 8
Területképletek, 42
Háromszög egyenlőtlenség, 35
Halmazok
Alkalmazott jelölések, 7
Hasznosságok
ESZESEN KFT., 6
Letölthetés, 6
Megtalálható, 6
Szoldatics József, 6
www.eszesen2010.hu, 6
Hermite azonosság, 67
Hilbert-egyenlőtlenség, 24
Horner elrendezés, 17

I

Injektív függvény, 7

J

Jensen-egyenlőtlenségek, 24

K

Kőnig Dénes tétel, 54
kis Fermat-tétel, 68
Konkáv függvény, 7
Konstans
$\frac{1}{\phi}$ 100 tizedesjegyre, 70
$\frac{1}{\pi}$ 100 tizedesjegyre, 71
$\frac{1}{e}$ 100 tizedesjegyre, 70
ϕ 100 tizedesjegyre, 70
π 100 tizedesjegyre, 70
π^2 100 tizedesjegyre, 71
$\sqrt{2}$ 100 tizedesjegyre, 71
$\sqrt{3}$ 100 tizedesjegyre, 71
$\phi \approx 1{,}61803398874\ldots$, 57
$\pi \approx 3{,}1415926\ldots$, 58
e $\approx 2{,}7182818\ldots$, 57
e 100 tizedesjegyre, 70
Konvex függvény, 7
Kotangens-trükk', 32

L

Legendre-tétel, 68
LTE tétel, 68

M

Megoldó képletek, 17
- Cardano-képlet, 17
- Harmadfokú egyenlet, 17
- Másodfokú egyenlet, 17
- Negyedfokú egyenlet, 19

Menelaosz-tétel, 32
Mihăilescu-tétel, 69
Minkowski-egyenlőtlenség, 25
Mitrinovic-egyenlőtlenség, 35
Morley-tétel, 32
Muirhead-egyenlőtlenség, 25

N

Nagel-pont, 32
Nesbitt-egyenlőtlenség, 25
Nevezetes egyenlőtlenségek, 22
- Bernoulli-egyenlőtlenségek, 22
- Carleman-egyenlőtlenség, 22
- Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség
  - Engel forma, 23
  - Titu lemma, 23
- Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségek, 23
- Csebisev-egyenlőtlenség, 23
- EV-egyenlőtlenség, 23
- Hölder-egyenlőtlenségek, 24
- Hilbert-egyenlőtlenség, 24
- Jensen-egyenlőtlenségek, 24
- Minkowski-egyenlőtlenség, 25
- Muirhead-egyenlőtlenség, 25
- Nesbitt-egyenlőtlenség, 25
- Popoviciu-egyenlőtlenségek, 25
- Rendezési egyenlőtlenségek, 26
- Schur-egyenlőtlenség, 26
- Számtani-mértani egyenlőtlenség, 26
- Young-egyenlőtlenség, 27

Nevezetes számok, 57
"Névtelen" egyenlőtlenségek, 36

O

Ortocentrum, 8
Összegzések, 13
- Hatványösszegek, 13
- Vegyes egész összegek, 14
- Vegyes tört összegek, 15

Osztási maradékok, 65
- Köbszámok, 65
- Négyzetszámok, 65
- Negyedik hatványok, 65

Osztók összege $\sigma(n)$, 67
Osztók száma $d(n)$, 67
Oszthatósági szabályok, 63
- Nem szokásos szabályok, 64
- Szokásos szabályok, 63

P

Padoa-egyenlőtlenség, 35
Pappos-tétel, 33
Pascal-Brianchon-tétel
- Brianchon-tétel, 30
- Pascal-tétel, 33

Pascal-tétel, 33
Pell egyenlet, 21, 76
- $x^2 - Dy^2 = 1$ első megoldásai, 21
- $x^2 - Dy^2 = k$ első megoldásai, 21
- A megoldások szerkezete, 21

Pitagorasz-tétel, általánosítás, 33
Pitagoraszi számhármasok, 66, 78
- Általános megoldás, 66
- Számhármasok 20-ig, 66
- Számhármasok 203-ig, 78

Popoviciu-egyenlőtlenségek, 25
Prímek 8110-ig, 72
Ptolemaiosz-egyenlőtlenség, 35
Ptolemaiosz-tétel, 33

R

Ramsey szám
- Két halmazra, 79

Ramsey számok, 62
- Három halmazra, 62
- Két halmazra, 62

Ramsey tétel, 55
Reciprok egyenlet, 20
Rendezési egyenlőtlenségek, 26
Reuschle-tétel, 33

S

Schur-egyenlőtlenség, 26
Simson-egyenes, 34
Speciális egyenletek, 20
- Antiszimmetrikus egyenlet, 20
- Reciprok egyenlet, 20
- Szimmetrikus egyenlet, 20

Speciális gráfok, 56
- Grötzsch gráf, 56
- Petersen gráf, 56
- Teljes gráf, 56

Stewart-tétel, 34
Szürjektív függvény, 7
Számelmélet, 63
Számelméleti függvények, 66
Számelméleti tételek, 67
- Bertrand-tétel, 67

Bezout-tétel, 67
Catalan-sejtés, 67
Euler-Fermat-tétel, 68
Hermite azonosság, 67
kis Fermat-tétel, 68
Legendre-tétel, 68
LTE tétel, 68
Mihăilescu-tétel, 69
Osztók száma, 69
Wilson-tétel, 69
Wolstenholme-tételek, 69
Számtani-mértani egyenlőtlenség, 26
Szimmetrikus egyenlet, 20
Szimmetrikus polinomok, 15
Három változó, 15
Két változó, 15

T

Táblázatok, 70
$\frac{1}{\phi}$ 100 tizedesjegyre, 70
$\frac{1}{\pi}$ 100 tizedesjegyre, 71
$\frac{1}{e}$ 100 tizedesjegyre, 70
ϕ 100 tizedesjegyre, 70
π 100 tizedesjegyre, 70
π^2 100 tizedesjegyre, 71
$\sqrt{2}$ 100 tizedesjegyre, 71
$\sqrt{3}$ 100 tizedesjegyre, 71
Binomiális együttható, 73
Catalan szám, 74
e 100 tizedesjegyre, 70
Évszámok, 71
Fibonacci számok, 75
Prímek 8110-ig, 72
TEX
LATEX, 6
TEXstudio, 6
MIKTEX, 6
Trigonometria, 44
Összefüggések, 44
Szögek pontos értékei, 47
Trigonometrikus összegek, 50
Trigonometrikus értékek sorozata, 49
Turán tétel 2., 55

V

Varignon-tétel, 34
Vektorok, 50
Háromszög, 50
Háromszög egyenlőtlenségek, 50
Háromszög magasságpontja, 50
Háromszög súlypontja, 50
Háromszög, beírt kör, 51
Háromszög, körülírt kör, 51
Négyszög, 51
Négyszög súlypontja, 51
Viète formulák, 16

W

Wallace-egyenes, 34
Weitzenböck-egyenlőtlenség, 35
Wilson-tétel, 69
Wolstenholme-tételek, 69

Y

Young-egyenlőtlenség, 27