1. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_1fel)
Az a, b, c, d egész számokra $a < b < c < d$ teljesül. Tudjuk, hogy az

$$E=(b-a)(b+c+d)(c+a+d)+(c-b)(c+a+d)(a+b+d)+(a-c)(a+b+d)(b+c+d)$$

kifejezés értéke prímszám. Mi ennek a prímszámnak az értéke?

1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_1fel_1mego)
A megadott kifejezést átalakítva az

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

kifejezést kapjuk. Ez prímszám értéket csak akkor vehet fel, ha 2 tényezö 1, ill. -1, és a harmadik p v. -p.

$$\begin{array}{l} (a-b) < 0 \\ (b-c) < 0 \end{array}$$

valamint

$$\begin{array}{l} |a-b| < |c-a| \\ |b-c| < |c-a| \end{array}$$

következik a feladat állításából, tehát p ill. -p csak (c−a) lehet, mert az a legnagyobb abszolútértékü a három tényezö közül, ezért

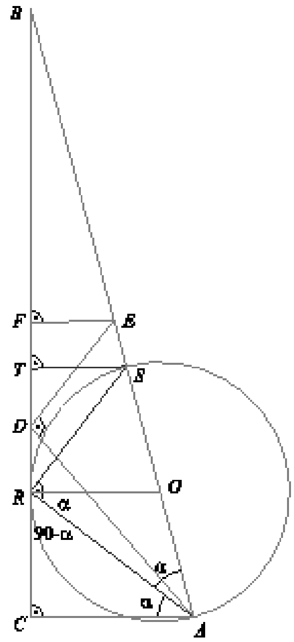
$$\begin{array}{l} (a-b)=-1 \\ (b-c)=-1 \\ c=a+2 \\ (c-a)=2 \end{array}$$

emiatt a 2 az egyetlen prím érték, amit a kifejezés felvehet.

. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_2fel)

Az *ABC* derékszögü háromszög *BC* befogójának D pontjában az *AD* szakaszra állított merőleges az *AB* átfogót az E pontban metszi. Az E pont*BC*-re esö merőleges vetülete az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a *CF* szakasz hossza akkor minimális, ha a D pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_2fel_1mego)



Az *ABC* háromszögben *EF* párhuzamos *AC*-vel, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BA}$$

$$BE=BF\frac{BA}{BC}$$

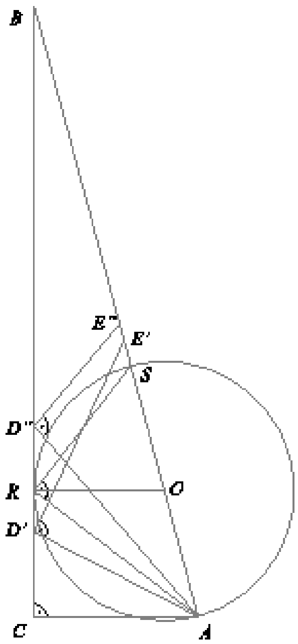
BA/*BC* bármilyen F és E pont esetében állandó, így *BE* a *BF* lineáris függvénye. Tehát amikor *BF* maximumát keressük - ami ekvivalens *CF*minimumának keresésével -, elég *BE* maximumát keresni.

A feladat szerinti, a *BC* oldalon futó D pontot jelölje R, ha rajta van *CAB*□ felezőjén is. Az ehhez tartozó E pont jele legyen S, F-é T.

ARS háromszög derékszögü, ezért a körülírható körének a középpontja *AS* szakasz felezőpontja (O). Így *OAR*□=*ORA*□ = α.

ACR háromszög is derékszögü, és az A-nál levö szöge α, így *ARC*□=90-α. Ebböl az következik, hogy *RO*⊥*BC*, mert *CRO*□=90-α+α=90.

Tekintsük az *ARS* háromszöget, melynek az eddig elmondottak miatt *BC* nyilván érinti a köréírt körét (merőleges az *OR* sugárra és a végpontján, R-en megy át). Emiatt ha a *BC*-n futó D pontra D ≠ R, akkor *ADS*□ < 90. Ekkor az *AD*', ill. *AD*" szakaszokra D'-ben ill. D"-ben állított merőleges *AB*-t a *BS* szakaszon metszi



így a kapható *BE* szakaszok nem nagyobbak *BS*-nél, és a feladat állítását bizonyítottuk.

1. feladat (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_3fel)

a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan k egész szám van, amelyre k és k + 1 is két pozitív egész szám négyzetének összegeként írható fel.
b) Igazoljuk azt is, hogy nem létezik olyan k egész szám, amelyre a k, k + 1, k + 2 és k + 3 számok mindegyike felbontható két négyzetszám összegére.

1. megoldás (AD_HALADOK_2001_3ford_Ikat_3fel_1mego)

a) A négyzetszámok legyenek a^2, b^2, c^2, d^2, így:

$$k=a^2+b^2$$
$$k+1=c^2+d^2$$

$$k+1-k=1$$
$$c^2+d^2-a^2-b^2=1$$

Ez teljesül, ha c = 1, valamint d, a, b olyan pitagoraszi számhármas, ahol d a legnagyobb, mert így:

$$d^2=a^2+b^2$$
$$c^2=1$$

$$c^2+d^2=a^2+b^2+1$$
$$c^2+d^2-a^2-b^2=1$$

Mivel a d, a, b pitagoraszi számhármast végtelen sokféleképpen választhatjuk meg, így végtelen sok olyan k egész szám létezik, amelyre a feladat állítása teljesül.
b) A négyzetszámok 4-es osztási maradéka 0 v. 1. 4 egymást követö szám között van olyan, amelynek a 4-es osztási maradéka 3. De 2 négyzetszám összegének osztási maradéka csak

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+1=2$$

lehet, vagyis nincs olyan k pozitív egész, amelyre a feladat állítása teljesül.