Arany Dániel Matematika Verseny 2002-2003.
Haladók, első forduló
I. kategória feladatainak megoldása

1. feladat:
Bizonyítsuk be, hogy ha p és q páratlan szám, akkor az $x^2 + 2px + 2q = 0$ egyenletet nem elégítheti ki két egész szám.

1. megoldás:
Megmutatjuk, hogy az egyenlet egyik gyöke sem lehet egész szám, ha egyáltalán van gyöke az egyenletnek. 2 pont
Tegyük fel, hogy az egyenlet gyöke az x_1 egész szám. Ha x_1 páratlan szám, akkor $x_1^2 + 2px_1 + 2q$ is páratlan szám, így értéke nem lehet 0. 2 pont
Ha pedig x_1 páros szám, azaz $x_1 = 2k$ alakú, ahol $k \in Z$, akkor $4k^2 + 4pk + 2q = 0$ alapján $2(k^2 + pk) + q = 0$. 2 pont
A bal oldalon álló szám páratlan, hiszen q páratlan szám, ezért nem érhet nullát.
Tehát az egyenlet egyik gyöke sem lehet egész szám, ami a feladat állítását igazolja. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás:
Tegyük fel, hogy az egyenletnek egyáltalán van gyöke!
Ekkor $4p^2 - 8q \geq 0$, azaz $p^2 \geq 2q$. 1 pont
Ha a diszkrimináns nemnegatív, akkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján $x_1 + x_2 = -2p$ és $x_1 x_2 = 2q$. 1 pont
Ha x_1 és x_2 egész szám, akkor az $x_1 x_2 = 2q$ összefüggés alapján az egyik gyök csak páros, a másik csak páratlan szám lehet. 2 pont
Akkor viszont $x_1 + x_2$ értéke szükségképpen páratlan szám, ami lehetetlen, mert értéke $-2p$. 2 pont
Tehát nem lehet az egyenlet mindkét gyöke – ha van – egész szám. 1 pont

Összesen: 7 pont

1. megjegyzés:
A megoldóképlet alapján $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - 2q}$.
Akkor lehetne az x értéke egész szám, ha $p^2 - 2q$ négyzetszám.
Ha a versenyző megmutatja, hogy $p^2 - 2q$ nem lehet négyzetszám, akkor a megoldásért járó pontokat értelemszerűen megkaphatja.

2. megjegyzés:
Az 1. megjegyzés megoldásra vonatkozó gondolatmenete alapján közvetlenül belátható, hogy az adott egyenletnek csak irracionális gyöke lehet.

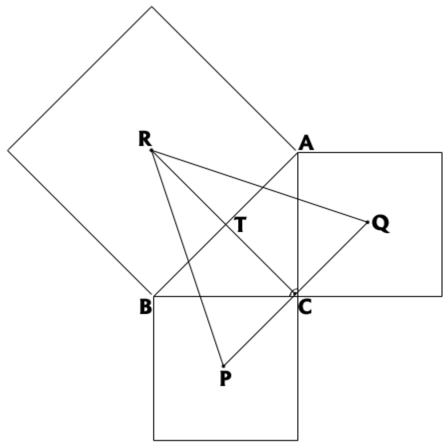
2. feladat:

Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Igazoljuk, hogy a négyzetek középpontja által meghatározott háromszög területe fele az átfogóra rajzolt négyzet területének.

Megoldás:

Tekintsük a következő ábrát!

$AC = BC = b$



.

Az ábra jelöléseinek megfelelő P, Q és C pont nyilvánvalóan egy egyenesen van, hiszen $PCB\angle = QCA\angle = 45°$. 1 pont

A PQR háromszög a szimmetria miatt egyenlő szárú $(PR = QR)$, ezért RC éppen a PQR háromszög magassága. 1 pont

A PQ szakasz hossza $AC^2 + BC^2 = AB^2$ alapján $b\sqrt{2}$ egység hosszú, hiszen $PQ = AB$. 1 pont

Mivel az RC magasság egyenese szimmetriatengelye az ábrának, ezért egyrészt RC merőleges AB-re, másrészt $RC = RT + TC = b\dfrac{\sqrt{2}}{2} + b\dfrac{\sqrt{2}}{2} = b\sqrt{2}$, hiszen $AT = BT = RT = CT$. 2 pont

A PQR háromszög területe így $\dfrac{PQ \cdot RC}{2} = \dfrac{b\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}}{2} = b^2$. 1 pont

Az átfogóra rajzolt négyzet területe $AB^2 = 2b^2$, tehát a PQR háromszög területe valóban fele az AB oldalú négyzet területének. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. feladat:

Határozzuk meg a minden valós számra értelmezett $f(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+4x+4}}$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

A nevezőt gyöktelenítve $f(x)=\frac{(1-2x)(|x-3|-|x+2|)}{-10x+5}=\frac{1}{5}(|x-3|-|x+2|)$, ahol $x\neq\frac{1}{2}$, de $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 2 pont

A szokásos tartományonkénti vizsgálattal $f(x)$ alakja:

$$f(x)=\begin{cases}1,\ \text{ha } x<-2 \\ \frac{1}{5}(-2x+1),\ \text{ha } -2\le x<3 \\ -1,\ \text{ha } 3\le x\end{cases}.$$

1 pont
1 pont
1 pont

A $[-2;3]$ intervallumon $f(x)$ csökkenő függvény, valamint $f(-2)=1$ és $f(3)=-1$. 1 pont

Így a függvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

Az $f(x)=\frac{1-2x}{|x-3|+|x+2|}$ alak felírásáért is megadható a megoldás szerinti első 2 pont.

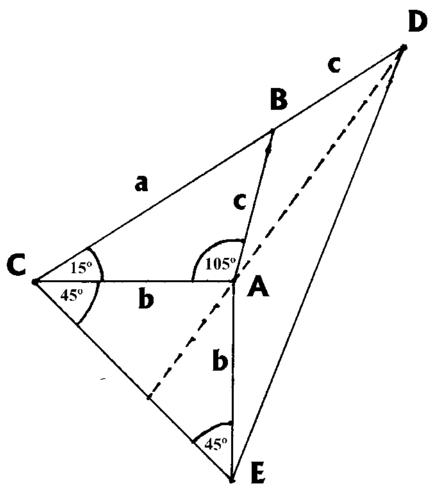
4. feladat:

Az a, b, c oldalú háromszög oldalaival szemközti szögek rendre α, β, γ.
Igazoljuk, hogy $\alpha-\beta=\beta-\gamma=45°$ esetén $a+c=b\sqrt{2}$.

1. megoldás:

Felhasználva, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180°$, a feltételek alapján a háromszög szögei: $\alpha=105°$, $\beta=60°$, $\gamma=15°$. 1 pont

A következő ábrát a bizonyítandó állításnak megfelelően úgy rajzoltuk meg, hogy $BD=c$ legyen – így $CD=a+c$ – valamint a CAE háromszög egyenlő szárú derékszögű legyen, ekkor pedig $CE=b\sqrt{2}$.



Az ABD háromszög egyenlő szárú $AB = BD = c$ miatt, ezért $ADB\angle = BAD\angle = 30°$, mert $ABC\angle = 60°$. 1 pont

Az ábrának megfelelően $CAD\angle = CAB\angle + BAD\angle = 105° + 30° = 135°$, így a DAE szög értéke is $135°$, mert $DAE\angle = 360° - 135° - 90° = 135°$. 1 pont

Az ADC és ADE háromszög az előzőek alapján egybevágó, hiszen AD oldaluk közös és $AC = AE = b$, továbbá $CAD\angle = DAE\angle = 135°$. 1 pont

Az egybevágóság alapján $DC = DE = a + c$, ami pedig azt jelenti, hogy a CED háromszög egyenlő szárú, így $DEC\angle = DCE\angle = 60°$. 1 pont

Következésképpen a CED háromszög szabályos, így oldalai egyenlő hosszúak, tehát $CD = CE$, azaz $a + c = b\sqrt{2}$. 2 pont

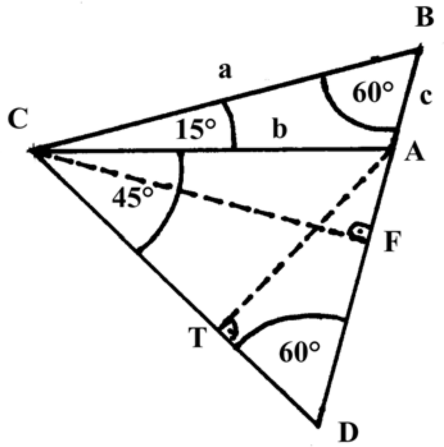
---

Összesen: 7 pont

2. megoldás:

A háromszög szögei: $\alpha = 105°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 15°$. 1 pont

Egészítsük ki a háromszöget az alábbi ábrán látható módon a BCD szabályos háromszögre.



A kiegészítés eredményeképpen $ACD\angle = 45°$, $CDB\angle = 60°$.

A BCD szabályos háromszögből $CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DF = BF = \frac{a}{2}$, így $AF = \frac{a}{2} - c$ és $AD = a - c$. 1 pont

Az ACF derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele alapján $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 = b^2$, azaz $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ (I.) teljesül. 2 pont

Az ábra ACT derékszögű háromszöge egyenlő szárú, így $AT = \frac{b}{\sqrt{2}}$, másrészt viszont $AT = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ az ADT háromszögből, így $AT = \frac{b}{\sqrt{2}} = (a - c) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz $a - c = b \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$ (II.). 1 pont

(II.) négyzetre emelésével $\frac{2b^2}{3} = a^2 + c^2 - 2ac$ adódik, amit (I.)-ből kivonva: $\frac{b^2}{3} = ac$. 1 pont

Mivel $(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$, ezért (I.) alapján az $a^2 + c^2 = b^2 + ac$ összefüggést használva $(a+c)^2 = b^2 + ac + 2ac = b^2 + 3ac = b^2 + b^2 = 2b^2$ adódik.

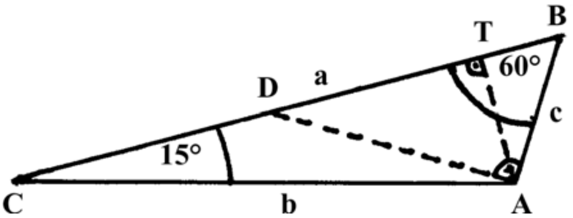
Ha pedig $(a+c)^2 = 2b^2$, akkor $a + c = b\sqrt{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás:

A háromszög szögei: $\alpha = 105°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 15°$. 1 pont

Az alábbi ábra szerint merőlegest állítunk az AB oldalra az A csúcsban, amely a BC oldalt D-ben metszi.



Az ábrán látható szögek közvetlenül számíthatók: $BDA\angle = 30°$, $CDA\angle = 150°$, $CAD\angle = 15°$.

A szögek értéke alapján az ABD derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele, így $BD = 2c$ és $AD = c\sqrt{3}$. 1 pont

A CAD háromszög egyenlő szárú, ezért $DC = DA = c\sqrt{3}$.

Mivel $BC = BD + CD$, ezért $a = 2c + c\sqrt{3} = c(2+\sqrt{3})$ (I.). 1 pont

Az ABD derékszögű háromszögből $BT = \frac{c}{2}$, $TD = \frac{3c}{2}$, a háromszög AT magassága pedig $AT = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ értékű.

Az ATC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele szerint $b^2 = \left[c\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$, azaz $b^2 = c^2\left(6 + 3\sqrt{3}\right)$ (II.) teljesül. 1 pont

Az $a = c\left(2+\sqrt{3}\right)$ összefüggés alapján $c^2 = a^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$, amit (II.)-be helyettesítve $b^2 = a^2\left(6 - 3\sqrt{3}\right)$ adódik.

Eredményeink alapján $a + c = \frac{b}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}} = b\left(\frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}\right)$. 1 pont

Négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$(a+c)^2 = b^2\left(\frac{1}{6-3\sqrt{3}} + \frac{1}{6+3\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\right) = b^2\,\frac{6+3\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}+6}{9} = 2b^2$$ adódik,

ahonnan az $a + c = b\sqrt{2}$ bizonyítandó állítást kapjuk. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. feladat:

Egy négyjegyű négyzetszám számjegyei 9-nél kisebbek. Ha mindegyik számjegyet 1-gyel megnöveljük, akkor ismét négyzetszámot kapunk. Határozzuk meg az eredeti négyzetszámot!

Megoldás:

A feltételek szerint $x^2 + 1111 = y^2$, ahol $x, y \in Z^+$ és $1000 < x^2 < 8888$. 2 pont

Az egyenletet átalakítva $1111 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ adódik. 1 pont

Az $(y-x)$ és $(y+x)$ tényezők közül az előbbi a kisebb, mindkét tényező pozitív egész szám, melyek szorzata 1111.

Mivel 1111 prímtényezős felbontása $11 \cdot 101$, ezért

$$\left.\begin{aligned} y-x&=1 \\ y+x&=1111 \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} y-x&=11 \\ y+x&=101 \end{aligned}\right\} \quad \text{lehetséges csak.}$$ 1 pont

Az egyenletszerek megoldása:

x	555	45
y	556	56

1 pont

Az $x = 555$ szám nem megfelelő, mert 555^2 nem négyjegyű. 1 pont

Az $x = 45$ szám viszont megoldás, mert $45^2 = 2025$ és $2025 + 1111 = 3136 = 56^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont