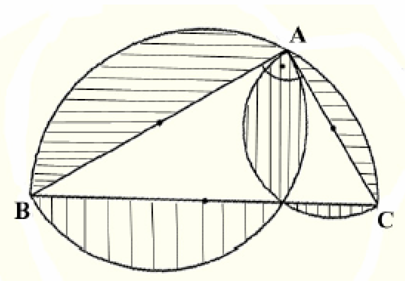
M

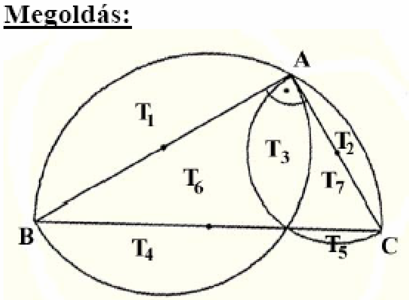
Arany Dániel Matematika Verseny 2002-2003.
Haladók, második forduló
I. kategória feladatainak megoldása

1. feladat:



Az ABC derékszögű háromszög oldalai fölé rajzolt Thalesz-körívek az ábrán látható síkrészeket határozzák meg. Bizonyítsuk be, hogy a bevonalkázott öt darab síkrész közül az AB ill. AC befogóra illeszkedők terület-összege megegyezik a maradék három rész területének összegével.

Megoldás:



Az $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ jelölésekkel Pitagorasz tételéből $a^2 = b^2 + c^2$. (1 pont)

A BC fölé írt Thalesz-félkör területe (az ábra jelöléseivel)

$$\frac{a^2\pi}{2} = T_1 + T_6 + T_3 + T_7 + T_2.$$ (1 pont)

Az AC fölé írt Thalesz-félkör területe:

$$\frac{b^2\pi}{2} = T_3 + T_7 + T_5.$$ (1 pont)

Az AB fölé írt Thalesz-félkör területe:

$$\frac{c^2\pi}{2} = T_4 + T_6 + T_3.$$ (1 pont)

Mivel $\frac{a^2\pi}{2} = \frac{b^2\pi}{2} + \frac{c^2\pi}{2}$, ezért

$$T_1 + T_6 + T_3 + T_7 + T_2 = (T_3 + T_7 + T_5) + (T_4 + T_6 + T_3).$$ (2 pont)

Mindkét oldalból $T_3 + T_7 + T_6$-ot elvéve a bizonyítandó

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4 + T_5$$ egyenlőséget kapjuk. (1 pont)

Összesen: 7 pont

2. feladat:

Melyik az a háromjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegyét letörölve, majd ezt a számjegyet a megmaradó két számjegy után írva, olyan háromjegyű számot kapunk, melynek négyzetgyöke 9-cel kisebb az eredeti szám négyzetgyökénél.

Megoldás:

Legyen az eredeti háromjegyű szám:

$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

Vezessük be a $10y + z = u$ jelölést, ahol $10 \le u \le 99$.

A feladat feltételei alapján ekkor

$\sqrt{100x+u} = a \ge 10$ és $\sqrt{10u+x} = a - 9 \ge 10$. 1 pont

Egyenleteink négyzetre emelt alakjának megfelelő oldalait kivonva egymásból

$$(100x+u)-(10u+x) = a^2 - (a-9)^2 \text{, azaz}$$

$$99x - 9u = 18a - 81 > 0 \text{ adódik.}$$

9 -cel való osztás után az u -ra rendezett alak:

$$u = 11x + 9 - 2a \text{ .}$$ 1 pont

Mivel u és x egész szám, ezért az a szám racionális szám, ekkor pedig $a \in Z^+$, hiszen

$$100x + u = a^2 \text{ .}$$ 2 pont

A $100x + u = a^2$ egyenletbe helyettesítve az u -ra kifejezett értéket a

$$111x + 9 - 2a = a^2 \text{ formulát kapjuk,}$$

ami rendezéssel

$$111x + 10 = (a+1)^2 \text{ alakú.}$$

A $111x + 10$ összeg $x \in \{1,2,\ldots,9\}$ esetén viszont csak $x = 1$-re és $x = 6$ -ra négyzetszám. 2 pont

Az $x = 1$ esetben $\overline{xyz} = 100$ nem felel meg a feltételnek.

Az $x = 6$ esetben $676 = (a+1)^2$, ahonnan

$$a = 25 \text{ .}$$

Az eredeti háromjegyű szám így 625 , ami megfelelő is, hiszen

$$\sqrt{625} = 25 \text{ és } \sqrt{256} = 16 \text{ .}$$ 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

$\sqrt{100x+u} = a$ és $\sqrt{10u+x} = a - 9$ alapján könnyen belátható, hogy az „a" szám pozitív egész szám.

Mivel $10u + x$ háromjegyű szám, ezért $a - 9 \ge 10$, tehát $a \ge 19$. Másrészt $a \le 31$, mert 32^2 már négyjegyű szám. Ezek alapján $19 \le a \le 31$. Az egyes esetek megfelelőségének vizsgálatából adódik, hogy csak $a = 25$ lehetséges.

- Ha a versenyző igazolja, hogy a megfelelő háromjegyű számok négyzetszámok, utána pedig minden szóba jöhető esetet megvizsgál, akkor megoldását teljes értékűnek kell tekinteni.

3. feladat:

Adjunk meg 21 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a kisebb 11 darab szám (azaz az első 11 darab) négyzetösszege megegyezzen a 10 darab nagyobb szám négyzetének összegével.

Megoldás:

Olyan x pozitív egész számot kell keresni, amelyre $x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+10)^2=(x+11)^2+(x+12)^2+\ldots+(x+20)^2$ teljesül. 1 pont

Az egyenlet átrendezett alakja:

$x^2=\left[(x+11)^2-(x+1)^2\right]+\left[(x+12)^2-(x+2)^2\right]+\left[(x+13)^2-(x+3)^2\right]+\ldots+\left[(x+20)^2-(x+10)^2\right]$

Mivel $(x+10+i)^2-(x+i)^2=10\cdot(2x+10+2i)=20(x+i+5)$ bármely $1\le i\le 10$ esetén, ezért $x^2=20(x+6)+20(x+7)+20(x+8)+\ldots+20(x+15)$. 1 pont

Újabb rendezéssel

$$x^2=10\cdot 20x+20(6+7+8+\ldots+15) \text{ adódik.}$$

A $6+7+8+\ldots+15$ összeg értéke 105, így egyenletünk

$$x^2-200x=2100 \text{ alakú}$$ 2 pont

Teljes négyzetté alakítással

$$(x-100)^2=12100=110^2\text{, ezért } |x-100|=110.$$ 1 pont

A kapott egyenlet pozitív egész megoldása: $x=210$. 1 pont

A 21 darab megfelelő szám – eredményünk alapján –:

210, 211, 212, …, 230. 1 pont

Összesen: 7 pont

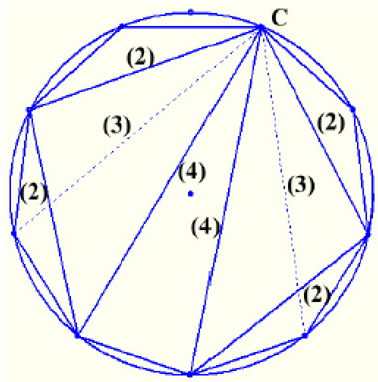
Megjegyzés:

21 darab szám helyett $(2n+1)$ -et véve x értékére megoldásunk alapján $x=(2n+1)\cdot n$ adódik.

4. feladat:

Egy szabályos kilencszöget egymást nem metsző átlók berajzolásával úgy akarunk háromszögekre darabolni, hogy a kilencszög mindegyik csúcsa a keletkezettek közül páratlan számú háromszögnek legyen a csúcsa. Mutassuk meg, hogy ez, a szimmetriától eltekintve, csak egyféleképpen lehetséges. (Vagyis: bármely két ilyen felbontás alkalmas forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető.)

Megoldás:



A keletkezett háromszögek szögeinek összege – a feladat feltételei miatt – egyenlő a sokszög szögeinek összegével, tehát összesen 7 háromszög keletkezik, azaz 6 átló húzható be. 1 pont

Háromféle átló lehetséges: az ábránk szerinti csúcsot (C) a második, harmadik és negyedik csúccsal összekötő. (Nevezzük (2)-es, (3)-as, és (4)-es típusúnak!) 1 pont

A (3)-as típusú nem jöhet szóba a feltétel szerint. (A (3)-as típusú átló a kilencszögből levág egy négyszöget, amelynek feltétlenül lesz olyan csúcsa, amely páros számú háromszögnek a csúcsa.) 2 pont

(4)-es típusú legföljebb kettő rajzolható be, (2)-es típusú maximum négy. (2)-es és (4)-es típusból együtt legföljebb 6. (ld. az ábrát!) 1 pont

Ez a feldarabolás egyértelmű, mert:

- a C-ből induló szögfelezőre szimmetrikus
- bármely csúcs C helyére fordítható úgy, hogy a kilencszög önmagába megy át. 2 pont

Összesen: 7 pont