1. feladat (AD_KEZDOK_2002_2ford_IIkat_1fel)
Mennyi az alábbi kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok:

$$2x^2-xy+y^2+2x+3y$$

1. megoldás (AD_KEZDOK_2002_2ford_IIkat_1fel_1mego)

$$2x^2-xy+y^2+2x+3y=(x+1)^2+x^2-xy+y^2+3y-1=$$

$$=(x+1)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y^2+3y-1=(x+1)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3(y+2)^2}{4}-4\geq -4$$

Mivel x = -1 és y = -2 esetén egyenlöség áll fenn, a kifejezés legkisebb értéke -4.

2. feladat (AD_KEZDOK_2002_2ford_IIkat_2fel)
Az *ABC* háromszög *AB* oldalával párhuzamos középvonalának egyenesét az A csúcsból kiinduló belsö szögfelezöje az M, a B csúcsból kiinduló belsö szögfelezöje az N pontban metszi. Ugyanígy kapjuk a másik két oldalból kiindulva a *KL* és *PQ* szakaszt. Mutassa meg, hogy 2(*MN* + *KL* + *PQ*) = *AB* + *AC* + *BC*.
1. megoldás (AD_KEZDOK_2002_2ford_IIkat_2fel_1mego)
Tekintsük elöször az *MN* szakaszt! Attól függöen, hogy az M és az N pontok a háromszög belsejében, a határán vagy a háromszögön kívül helyezkednek el, hat esetet kell megkülönböztetnünk. Mi ezekböl itt csak egyet vizsgálunk meg, a többi eset ugyanígy végiggondolható vagy dolgozhatunk vektorokkal. Legyen az *AC* felezöpontja F, a *BC*-é G, és tegyük fel, hogy M és N az *FG* szakasz belsö pontjai.
Az *FAM* szög egyenlö az *MAB* szöggel, mert *MA* szögfelezö. A *BAM* és *AMF* szögek megegyeznek, mert váltószögek. Így az *AMF* háromszög egyenlö szárú, tehát

$$MF=FA=\frac{AC}{2}.$$

$$\text{Hasonlóan látható, hogy } NG=BG=\frac{BC}{2}.$$

FG = *FM* + *NG* - *NM*, mivel az *NM* szakasz része az *NG* és *FM* szakaszoknak. Így:

$$\frac{AB}{2}=\frac{AC}{2}+\frac{BC}{2}-NM.$$

Tehát 2*NM* = *BC* + *AC* - *AB*.
Ugyanígy kapjuk, hogy 2*KL* = *BC* + *AB* - *AC* és 2*PQ* = *AC* + *AB* - *BC*.
Tehát 2(*NM* + *KL* + *PQ*) = *AB* + *AC* + *BC*, ami a bizonyítandó állítás.

3. feladat (AD_KEZDOK_2002_2ford_IIkat_3fel)
Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végzödik és osztható 2003-mal!

987654321=493087*2003+1060; 10^9=499251*2003+247. Így k*10^9+987654321=2003(k*499251+493087)+k*247+1060, tehát ha a k*247+1060=2003*m egyenletnek van a pozitív egész számok halmazán megoldása, akkor van megfelelő szám. Mivel a 2003 prímszám, így a 247 és a 2003 relatív prímek, azaz az egyenletnek van megoldása, tehát található megfelelő szám.
A diofantoszi egyenlet megoldása: m=247p-162; k=2003p-1318. p=1-nél m=85, k=685; tehát a legkisebb megfelelő szám: 685987654321(=2003*342480107)