Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2003–2004-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az első n pozitív egész szám összege egy olyan háromjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Mekkora n értéke?

Megoldás.
Az első n pozitív egész szám összege:

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$ 1 pont

Olyan háromjegyű szám, amelynek jegyei egyenlők, $111 \cdot x$, azaz $3 \cdot 37 \cdot x$ alakban írható, ahol x 1 és 9 közötti egész szám. 1 pont

A feltétel szerint

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 3 \cdot 37 \cdot x.$$

Mivel 37 prímszám, a számelmélet alaptétele szerint $37 \mid n$ vagy $37 \mid n+1$. 1 pont

Mivel $\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 > 1000$, csak az $n = 37$ vagy $n+1 = 37$ eset lehetséges. 1 pont

De ha $n = 37$, akkor $\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 38$ nem osztható 3-mal. 1 pont

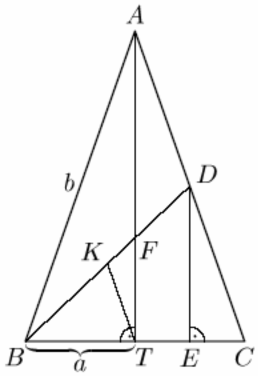
Így $n+1 = 37$, azaz $n = 36$ lehet csak. 1 pont

Ekkor $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 666$ megfelel a feltételnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Mekkora az oldalak aránya abban az egyenlő szárú háromszögben, amelyben az alap egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is?

1. megoldás. Legyen $BT = TC = a$ és $AB = AC = b$.



Az ábra jelöléseit használva az $AT=m$, $DE=y$, $CE=x$ jelölésekkel a CDE és a CAT háromszög középpontos hasonlósága alapján

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{m}=\frac{b-a}{b},$$

mert a BD kerületfelező szakasz az AC oldalt $AD=a$ és $CD=b-a$ hosszú szakaszokra osztja. 1 pont

A felírt összefüggésekből $y=\dfrac{m(b-a)}{b}$, $x=\dfrac{a(b-a)}{b}$, illetve $BE=2a-x=\dfrac{a(a+b)}{b}$ adódik. 2 pont

A BED és a BTF háromszögek hasonlóságából

$$\frac{TF}{ED}=\frac{BT}{BE}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{m}{2y}=\frac{b}{a+b}$$ 2 pont

következik, ahonnan az $y=\dfrac{m(b-a)}{b}$ helyettesítéssel $\dfrac{b}{2(b-a)}=\dfrac{b}{a+b}$ adódik.

Egyenletünk alapján $b=3a$. 1 pont

Tehát a háromszög oldalainak aránya:

$$AB:BC:CA=3:2:3.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az 1. megoldás ábráját használva húzzunk párhuzamost a T ponton keresztül az AC oldallal! Legyen a párhuzamos egyenes és a BD szakasz metszéspontja K – ábránknak megfelelően.

AC és KT párhuzamossága miatt az FKT és az FDA háromszög tükrös az F pontra, hiszen F az AT magasság felezőpontja. 2 pont

Viszont a BTK és a BCD háromszög középpontosan hasonló a B pontra, ahol a hasonlóság aránya $2:1$, 1 pont

így a $KF=FD=u$ jelöléssel $BK=2u$. 1 pont

Mivel a kerületfelezés miatt $AD=a$ és $DC=b-a$, ezért a BTK és a BCD háromszög hasonlósága alapján a $KT=DA=a$ összefüggést felhasználva 1 pont

$$\frac{b-a}{a}=\frac{4u}{2u}=2, \qquad \text{ahonnan} \qquad b=3a.$$ 1 pont

Az oldalak aránya így: $AB:BC:CA=3:2:3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hány darab pozitív egészekből álló $(k;n)$ számpárra igaz, hogy $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k$ és $k^2+n^2<100$?

Megoldás. A $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k$ egyenlőtlenség $n \geqslant k$ esetén értelmezhető. 1 pont

Mivel

$$\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}=\frac{2k}{\sqrt{n+k}-\sqrt{n-k}},$$ 1 pont

ezért az egyenlőtlenség $2>\sqrt{n+k}-\sqrt{n-k}$ alakra hozható.

Rendezéssel és négyzetre emeléssel $(2+\sqrt{n-k})^2>n+k$ adódik, ahonnan $2\cdot\sqrt{n-k}>$ $>k-2$. 1 pont

Ha $k=1$, akkor a kapott egyenlőtlenség $1+n^2<100$ alapján $n=1, 2, 3, \ldots, 9$-re teljesül. 1 pont

Ha viszont $k>1$, akkor négyzetre emelhetünk:

$$4(n-k)>(k-2)^2, \qquad \text{így} \qquad n>\frac{k^2+4}{4}.$$

A k szám értéke legfeljebb 5 lehet, mert $k=6$-ra már $n>10$ adódik, ami $k^2+n^2<100$ miatt lehetetlen. 1 pont

Így tehát $k=2$ esetén $3\leqslant n\leqslant 9$,
$k=3$ esetén $4\leqslant n\leqslant 9$,
$k=4$ esetén $6\leqslant n\leqslant 9$,
$k=5$ esetén $n=8$. 1 pont

A megfelelő $(k;n)$ számpárok száma így

$$9+7+6+4+1=27.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $x^2+x+p=0$ egyenlet két különböző valós gyöke x_1 és x_2, ahol p pozitív valós paraméter.

Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$ nagyobb (-2)-nél, de kisebb (-1)-nél.

Megoldás. Az egyenletnek $p<\dfrac{1}{4}$ esetén van két különböző valós gyöke. 1 pont

Mivel ekkor $x_1+x_2=-1$ és $x_1x_2=p$, ezért az

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

azonosság alapján

$$x_1^3+x_2^3=-1-3p(-1)=3p-1.$$ 1 pont

Az

$$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$$

azonosság szerint pedig

$$x_1^4 + x_2^4 = (1-2p)^2 - 2p^2 = 2p^2 - 4p + 1. \qquad \text{1 pont}$$

Bizonyítandó, hogy $-2 < \dfrac{3p-1}{2p^2-4p+1} < -1$.

Felhasználva, hogy $p < \dfrac{1}{4}$ esetén $2p^2 - 4p + 1 > 0$, a nevezővel való szorzás és rendezés után a

$$0 < 4p^2 - 5p + 1 \qquad \text{és a} \qquad 0 < -2p^2 + p$$

egyenlőtlenségek adódnak. 1 pont

Az első egyenlőtlenség ekvivalens módon átalakított alakja:

$$0 < 4(p-1)\left(p - \frac{1}{4}\right),$$

ami $0 < p < \dfrac{1}{4}$ esetén nyilvánvalóan teljesül. 2 pont

A második egyenlőtlenség $0 < p(1-2p)$ alakjából leolvasható, hogy $0 < p < \dfrac{1}{4}$ esetén az egyenlőtlenség mindig teljesül.

Ezzel pedig állításunkat igazoltuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Megoldás. Azt a diákot, akinek két nagyapja A és B, jelöljük (A,B)-vel! Több ilyen diák is lehet. Feltehetjük, hogy a 20 diáknak nincs közös nagyapja, különben nincs mit bizonyítani. 1 pont

Létezik tehát legalább egy diák, akinek B nem nagyapja. Legyen ő (A,C)! Hasonló módon van olyan diák, akinek A nem nagyapja. Ő csak (B,C) lehet, hiszen (A,B)-vel és (A,C)-vel is van közös nagyapja. 2 pont

Tehát mindenki (A,B), (A,C) vagy (B,C), jelöljük a megfelelő típusú diákok számát n_1, n_2, n_3-mal! Ekkor $n_1 + n_2 + n_3 = 20$. 1 pont

A közös nagyapja $n_1 + n_2$ diáknak, B $n_1 + n_3$-nak, C $n_2 + n_3$-nak. 1 pont

Ha legfeljebb 13 diáknak volna közös nagyapja, akkor innen

$$40 = 2(n_1 + n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + (n_1 + n_3) + (n_2 + n_3) \leqslant 3 \cdot 13 = 39,$$

ami nem lehetséges. 2 pont

Tehát van legalább 14 diák, akiknek van közös nagyapjuk.

Összesen: 7 pont