

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2003/2004 9. évfolyam 1. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgálató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Oldja meg az $x - \operatorname{sgn}(x+1) = 1 - \sqrt{2}$ egyenletet, ahol $\operatorname{sgn}(x)$ az előjelfüggvény, amelynek értéke:

$$\operatorname{sgn} \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

2. feladat

$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2004 \text{ db } 9}$
A \dots összegben hány 1-es számjegy fordul elő?

3. feladat

Az $ABCD$ rombuszt, ahol $\angle DAB = 60^\circ$, az átlók metszéspontja körül elforgatjuk 90° -kal. Így kapjuk az $A'B'C'D'$ rombuszt. Határozza meg a két rombusz közös részének területét, ha a rombusz oldalhossza a egység!

4. feladat

Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b és c nem negatív egész számok:

$$\text{I. } a + 2b + b^2 + c = 19,$$

$$\text{II. } a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = 15.$$

5. feladat

Az ABC háromszögben az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban, a C -ből induló szögfelező a szemközti oldalt az E pontban metszi. A szögfelezők metszéspontját jelöljük M -mel! Mekkora az ABC háromszög szögei, ha $AB = AD$ és $BM = BE$?