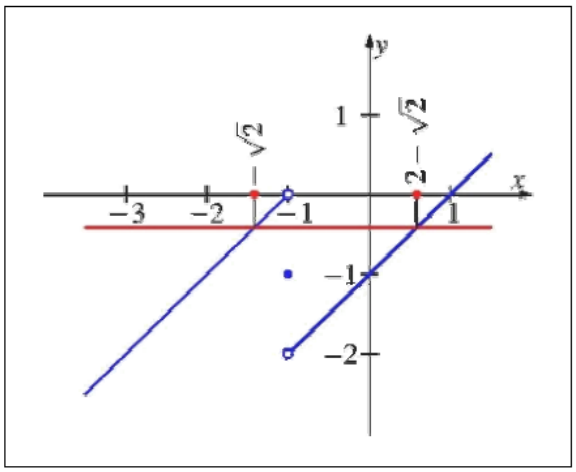
A 2004. évi Arany Dániel matematikai tanulóverseny
(kezdők) I. forduló feladatmegoldásai

1. Oldja meg az $x - \operatorname{sgn}(x+1) = 1 - \sqrt{2}$ egyenletet, ahol $\operatorname{sgn}(x)$ az előjelfüggvény, amelynek értéke:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ ha } x < 0, \\ \ \ 0 \text{ ha } x = 0, \\ \ \ 1 \text{ ha } 0 < x. \end{cases}$$

(6 pont)

Megoldás:



Az egyenlőség bal és jobb oldalán levő függvényeket ábrázolva könnyen látható, hogy két megoldás van: Ezeket egy-egy elsőfokú egyenlet megoldásával kapjuk:

$x + 1 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ és

$x - 1 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Pontozás:

A függvények ábrázolása (pl. intervallumokra bontással). (4 pont)

Az egyenletek felírása és a gyökök meghatározása. (2 pont)

2. A $9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{2004\,db\ 9}$ összegben hány 1-es számjegy fordul elő? (6 pont)

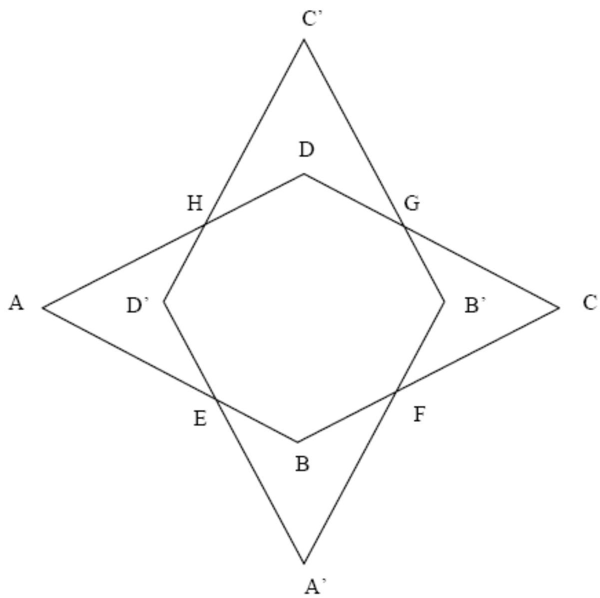
Megoldás. $9+99+999+\ldots+999\ldots9 = 10-1+100-1+1000-1+\ldots+10^{2004}-1 = \underbrace{111...1}_{2004\,db 1}0 - 2004 =$

$= \underbrace{111...1}_{2000\,db 1}09106$. Tehát 2001 db 1-es számjegy fordul elő.

Pontozás. Az első egyenlőségért 3 pont, a következő kettőért 1-1 pont és az eredményért 1 pont adható.

3. Az $ABCD$ rombuszt, ahol $DAB\angle = 60^\circ$, az átlók metszéspontja körül elforgatjuk 90°-kal. Így kapjuk az $A'B'C'D'$ rombuszt. Határozza meg a két rombusz közös részének területét, ha a rombusz oldalhossza a egység. (8 pont)

Megoldás.



Mivel az $A'B'C'D'$ rombusz újabb 90°-kal történő elforgatása az $ABCD$ rombuszt adja vissza, így szimmetria okokból a közös rész, $D'EBFB'GDH$ nyolcszög egyenlő oldalú. (1 pont)
A rombusz tulajdonságai miatt D, D', B, B' csúcsoknál 120°-os szögek vannak. Szintén szimmetria okokból a maradék 4 csúcsnál egyforma szögek szerepelnek, a szögösszegből adódóan ezek $\frac{6\cdot 180^\circ - 4\cdot 120^\circ}{4} = 150^\circ$-os szögek. (1 pont)

Mivel AEH és FCG háromszögek egyenlő szárúak, és mivel az A és a C csúcsoknál 60°-os szögek szerepelnek, így a két háromszög szabályos, oldalhosszuk legyen x. (1 pont)

Tehát $HE = GF = x$, hasonlóan $HG = EF = x$ és $HEF\angle = 90^\circ$ a forgatás tulajdonságai miatt. Itt a forgatás helyett szögösszegekre is lehetne hivatkozni. Tehát a keresett nyolcszög az $EFGH$ x oldalú négyzetből és négy egybevágó kis háromszögből áll. Egy ilyen kis háromszög területe az x oldalú szabályos háromszög területének harmada, hiszen egyenlő szárú és 120° a szárszöge. (2 pont)

Az AC átló hossza kétféleképpen fejezhető ki a és x ismeretében, nevezetesen

$$2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = x + 2\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}, \text{ azaz } x = a\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Összegezve az eddigieket kapjuk, hogy:

$$T = T_{\text{négyzet}} + 4\cdot T_{\text{háromszög}} = x^2 + \frac{x^2\sqrt{3}}{3} = x^2\,\frac{3+\sqrt{3}}{3} = a^2\,\frac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\cdot 3} = a^2\,\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \qquad \text{(1 pont)}$$

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b és c nemnegatív egész számok:

I. $a+2\cdot b+b^2+c=19$

II. $a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=15$

(10 pont)

1. Megoldás.

A két egyenletet összeadva a következőt kapjuk:

$a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+b+b^2=34$. (1 pont)

Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva:

$1+a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+b+b^2=35$. (1 pont)

A bal oldal szorzattá alakítható:

$(1+a+b)\cdot(1+b+c)=35$. (3 pont)

Mivel a bal oldalon mindkét tényező pozitív egész, ezért a következő esetek lehetségesek:

1) $1+a+b=1$ $1+b+c=35$

2) $1+a+b=5$ $1+b+c=7$

3) $1+a+b=7$ $1+b+c=5$

4) $1+a+b=35$ $1+b+c=1$ (1 pont)

Az 1) esetben $a=b=0$, a II. egyenletbe behelyettesítve ellentmondás adódik. (1 pont)

A 2) esetben $a+b=4$, $b+c=6$, ezért az I. egyenletből $b^2=9$ adódik, tehát $b=3$.

Innen $a=1$ és $c=3$. Ellenőrizhető, hogy ez valóban jó megoldás. (1 pont)

A 3) esetben $a+b=6$, $b+c=4$. Ismét az I. egyenletből $b=3$, tehát $a=3$ és $c=1$.

Ez is jó megoldás. (1 pont)

A 4) esetben $a+b=34$, $b+c=0$. Innen $b=c=0$ és $a=34$ adódik.

Ez ellentmondáshoz vezet I. és II. esetében is. (1 pont)

2. Megoldás:

Mivel b nemnegatív egész, ezért értékei: 0; 1; 2; 3 lehetnek, hiszen $b\geq 4$ esetén I.-ben a bal oldal 19-nél nagyobb lenne. (2 pont)

1) $b=0$

I. $a+c=19$

II. $a\cdot c=15$

II.-ből a értéke 1; 3; 5; 15 lehetne,

de I.-be helyettesítve egyik sem ad jó megoldást c-re. (2 pont)

2) $b=1$

I. $a+c=16$

II. $a+c+a\cdot c=15$.

II.-ből kivonva I.-et $a\cdot c=-1$ adódik, ami nem állhat fenn nemnegatív számokra. (2 pont)

3) $b=2$

I. $a+c=11$

II. $2\cdot a+2\cdot c+a\cdot c=15$

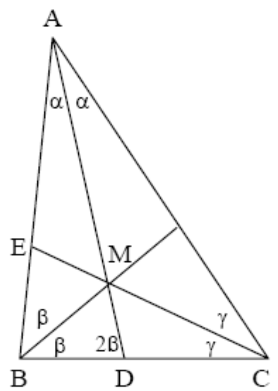
II.-ből kivonva $2\cdot$I.-t $a\cdot c=-7$ adódik, ami nem állhat fenn nemnegatív számokra. (2 pont)

4) $b=3$
I. $a+c=4$
II. $3\cdot a+3\cdot c+a\cdot c=15$
II.-ből kivonva $3\cdot$I.-t $a\cdot c=3$ adódik.
Ez kétféleképp állhat fenn: $a=1$, $c=3$, vagy $a=3$, $c=1$.

Visszahelyettesítve meggyőződhetünk arról, hogy mindkét eset valóban megoldását adja az egyenletrendszernek. (2 pont)

5. Az ABC háromszögben az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt D pontban, a C-ből induló szögfelező a szemközti oldalt E pontban metszi. A szögfelezők metszéspontját jelöljük M-mel! Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha $AB=AD$ és $BM=BE$? (10 pont)

Megoldás.



Legyenek a háromszög szögei: 2α, 2β, 2γ.
Ekkor: $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ 1) (1 pont)

ABD háromszög egyenlőszárú, tehát $BDA\angle=2\beta$ és
$BMD\angle=180^\circ-3\beta$ (1 pont)

EBM háromszög egyenlőszárú, tehát $BEM\angle=BME\angle=\dfrac{180^\circ-\beta}{2}$
(1 pont)

Az MDC háromszögben: $MDC\angle=180^\circ-2\beta$
$DMC\angle=180^\circ-\gamma-(180^\circ-2\beta)=2\beta-\gamma$
(1 pont)

EMC$\angle$ egyenesszög, tehát $180^\circ=EMB\angle+BMD\angle+DMC\angle=\dfrac{180^\circ-\beta}{2}+(180^\circ-3\beta)+(2\beta-\gamma)$.

Ebből az egyenlőségből azt kapjuk, hogy $3\beta+2\gamma=180^\circ$ 2) (2 pont)

Az ABD háromszög szögeinek összege 180°, tehát $4\beta+\alpha=180^\circ$ 3) (2 pont)

A 2) egyenletből γ-t, a 3) egyenletből α-t kifejezve és ezeket az 1) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\beta=40^\circ$. Így a 2) és a 3) egyenletből $\gamma=30^\circ$ és $\alpha=20^\circ$.

Tehát az ABC háromszög szögei: 40^0, 80^0, és 60^0.
Ilyen háromszöget rajzolva a feladat szövegében szereplő szakaszok valóban egyenlők. (2 pont)