Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
2. forduló
haladók I. kategória

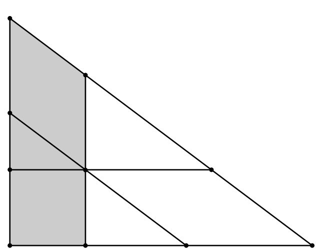
Megoldások és javítási útmutató

1. Kincskereső műszerünk hatósugara d méter. (A műszer d sugarú környezetében lévő kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CA = 50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges háromszög alakú tartomány esetén akkor lehetünk biztosak a kincs észlelésében, ha műszerünk hatósugara legalább akkora, mint a beírt kör sugara. (Jelöljük ezt a távolságot r-rel.) 1 pont

A beírt kör középpontja minden oldalegyenestől r távolságra van, ezért az oldalszakaszok pontjaitól legalább r távolságra van, vagyis ez a hatótávolság szükséges. 2 pont



Ha a beírt kör középpontján át párhuzamost húzunk valamelyik oldallal, akkor egy olyan trapéz alakú tartományt vágunk le a háromszögből, melynek pontjai az oldalszakaszról „bemérhetők”. (Vagyis a tartomány mindegyik pontjához van olyan pontja az oldalszakasznak, hogy a két pont távolsága legfeljebb r.)

A három oldalhoz tartozó három trapéz együtt lefedi az eredeti háromszög teljes területét, tehát egy r hatósugarú műszer minden esetben elegendő. 2 pont

A konkrét példában a beírt kör sugara a terület kétféle felírásából kiszámítható:

$$T = \frac{AB \cdot BC}{2} = r\frac{AB + BC + CA}{2} \implies r = 30 \cdot 40/120 = 10 \text{ m}.$$

Tehát d legkisebb megfelelő értéke 10 méter. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az a, b, c páronként különböző pozitív egész számokra $\dfrac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\dfrac{a+b}{b+c}$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $ax+cy=b^2$ egyenletnek mindig van pozitív egész számokból álló $(x;y)$ megoldása.

Megoldás. Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ és a $b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)$ azonosságok alapján

$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(b+c)(b^2-bc+c^2)}=\frac{a+b}{b+c}.$$ 1 pont

Egyszerűsítés és rendezés után $a^2-ab+b^2=b^2-bc+c^2$, azaz $a^2-b^2=ab-bc$ adódik. 1 pont

Szorzattá alakítással az $(a-c)(a+c)=b(a-c)$ alakhoz jutunk, ahonnan $a\neq c$ miatt $b=a+c$ adódik. 2 pont

Az $ax+cy=b^2$ alakja így $ax+cy=(a+c)^2$.
Ha most $x=y$, akkor $ax+cx=x(a+c)=(a+c)^2$, így pedig $x=y=a+c$. 2 pont

Az $x=y=a+c$ értékrendszer minden feltételnek megfelel, azaz valóban van pozitív egészekből álló megoldása az adott egyenletnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: az $ax+cy=b^2$ egyenlet más helyes megoldásának igazolásáért is 3 pont adható (például $x=a$, $y=2a+c$).

3. Tekintsük azokat a legalább kétjegyű tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek első számjegye 1, a többi pedig mind egyforma, de nem 0. Ezek között a számok között hány négyzetszám van?

Megoldás. A kétjegyű számok közül a 16 a megoldás.
A háromjegyűek közül 144 a megfelelő.
A négyjegyű számok közül csak $1444=38^2$ a megfelelő. 1 pont

Legyen a továbbiakban a számjegyek száma 4-nél nagyobb!
Mivel egy négyzetszám utolsó számjegye – 0 kivételével – csak 1, 4, 5, 6, 9 lehet, ezért a keresett számok alakja: 1111…1, 1444…4, 1555…5, 1666…6, vagy 1999…9. 1 pont

Egy négyzetszám 4-es maradéka csak 0 vagy 1 lehet, ezért nem végződhet a legalább 5-jegyű szám 11-re, 55-re, 66-ra, 99-re, mert ezekben az esetekben a 4-es maradék rendre 3, 3, 2, 3. 1 pont

Az 1444…4 alakú számok esetén viszont a 16-os maradék csak 444 16-os maradékától függ, hiszen 144…4000 osztható 16-tal. A keresett számok így $16k+444=x^2$ alakúak, ahol k és x pozitív egész szám. Ekkor viszont $x=2y$ alakú ($y\in\mathbb{Z}^+$), ezért $4k+111=y^2$. 2 pont

A kapott összefüggés azonban egyetlen y értékre sem teljesülhet, hiszen a bal oldal 4-es maradéka 3. 1 pont

Tehát összesen három szám a feladat megoldása.
Ezek: 16, 144, 1444. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet az a és b ismeretlenre:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{51+10\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}} = a + b\sqrt{2}.$$

Megoldás. Gyöktelenítéssel és teljes négyzetté alakítással fokozatosan egyszerűsítjük a baloldali kifejezést.

$$51+10\sqrt{2} = \left(1+5\sqrt{2}\right)^2 \implies \sqrt{51+10\sqrt{2}} = 1+5\sqrt{2}$$ 1 pont

$$\frac{1+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{1+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 11+6\sqrt{2}$$ 2 pont

$$11+6\sqrt{2} = \left(3+\sqrt{2}\right)^2 \implies \sqrt{11+6\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}$$ 1 pont

Egyenletünk tehát ekvivalens a következővel: $3+\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}$. 1 pont

Látható, hogy $a=3$, $b=1$ megoldás, megmutatjuk, hogy ez az egyetlen. Átrendezve $3-a=\sqrt{2}(b-1)$. Ha $b \neq 1$, akkor innen $\sqrt{2} = \dfrac{3-a}{b-1}$ adódna, ami nem lehetséges, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

Tehát az egyetlen egész megoldás: $a=3$, $b=1$. 2 pont

Összesen: 7 pont