

### ADh1-3m 0405

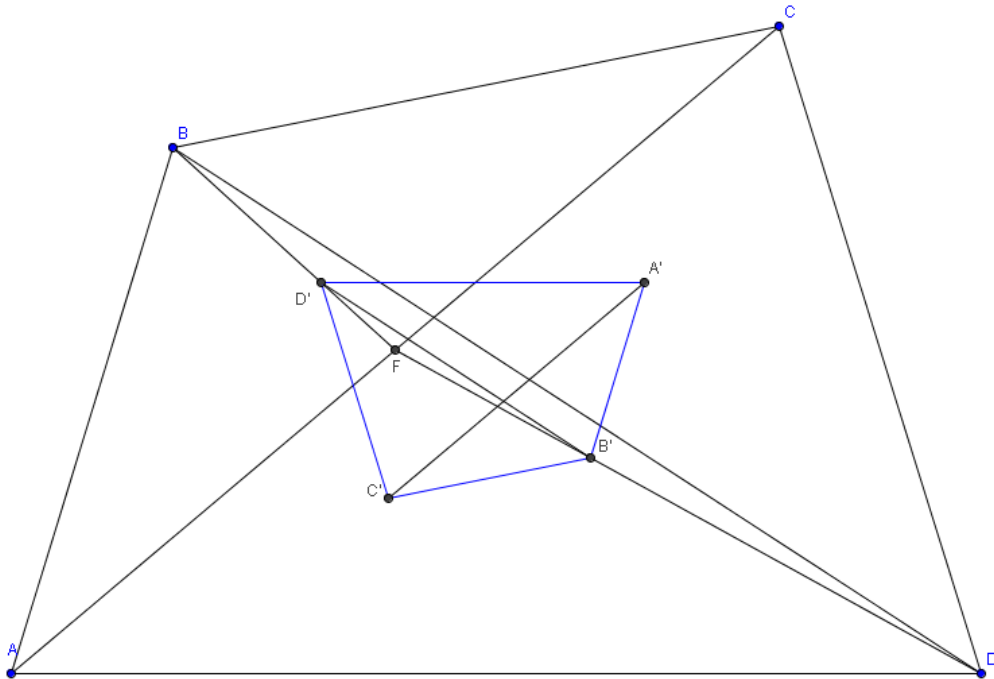
1. Egy sakk-körversenyen csak nagymesterek és mesterek vettek részt. Az utóbbiak száma 3-szor annyi volt, mint a nagymestereké, elért pontjaik együttes száma pedig 1,2-szerese volt a nagymesterek pontszámai összegének. A játékosok kétszer játszottak egymással (egyszer sötéttel, egyszer világossal) győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont járt. A verseny végén volt-e az első 3 helyezett között mester?

Mo: Legyen  $n$  Nagymester és  $3n$  Mester. Minden mérkőzésen 1 pontot osztottak ki, így a  $4n(4n-1)$  kiosztott pont közül  $N$ -ek egymást közti meccseken  $n(n-1)$  pontot gyűjtöttek be.  $M$ -ek egymást közt  $3n(3n-1)$  pontot, míg  $N$ - $M$  partikon kiosztott  $2 \cdot n \cdot 3n = 6n^2$  pont kerülhetett  $N$ -ekhez és  $M$ -ekhez is. Jelölje  $x$  azt a pontszámot, melyet a vegyes partikon az  $M$ -ek begyűjtöttek. A feltétel szerint  $1,2(n^2 - n + 6n^2 - x) = 9n^2 - 3n + x$ , amiből  $11x = 3n(3 - n)$ . Mivel  $x \geq 0$ , ezért  $n=1;2;3$  lehet. Mivel  $x$  egész vagy félegész, ezért csak  $n=3$  megfelelő. Tehát 3 nagymester és 9 mester indult, és  $x=0$  miatt minden vegyes partit a nagymesterek nyertek.

Legyen a legrosszabb helyezésű nagymester  $NN$ , a legjobb helyezésű mester  $MM$ . Mivel  $NN$  megvert minden  $M$ -et, ezért több pontot szerzett  $M$ -ektől, mint  $MM$ . Mivel  $MM$  mindig kikapott  $N$ -ektől, ezért  $M$  kevesebb vagy ugyanannyi pontot szerzett  $N$ -ektől, mint  $NN$ , tehát  $NN$  legalább annyi pontot szerzett  $N$ -ektől, mint  $MM$ . Így  $NN$  jobb helyezést ért el, mint  $MM$ , tehát a Nagymesterek az 1-3. helyezést érték el, mester nem volt így az első 3 közt.

2. Az  $ABCD$  négyszög egységnyi területű. Az  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  háromszögek súlypontja rendre  $D'$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Mekkora az  $A'B'C'D'$  négyszög területe?

Mo: Legyen  $AC$  átló felezőpontja  $F$ . Ekkor  $BDF$  háromszögben a kis négyszög  $B'D'$  átlója párhuzamos  $BD$  átlóval és annak harmada. Hasonlóan a kis négyszög másik átlója is párhuzamos a nagy négyszög másik átlójával és annak harmada. A kis négyszög területe így  $1/9$ .



3. Egy busztársaság egyik korszerű járműve fedélzeti számítógéppel van felszerelve. A számítógép megbecsüli, mennyi idő múlva érkezik meg a busz a következő állomáshoz. A becslést úgy végzi, hogy az útból eddig megtett szakaszra kiszámolja az átlagsebességet, és feltételezi, hogy a hátralévő útszakaszt is ilyen átlagsebességgel fogja megtenni. Egy alkalommal a busz a fővárostól 100 km-re fekvő településre indult. Az indulás után 40 perccel a számítógép azt jelezte, hogy még 1 óra van hátra a megérkezésig. Ezután 5 órán keresztül folyamatosan az volt olvasható a kijelzőn, hogy a busz 1 óra múlva érkezik célba. Mekkora része volt még hátra az útnak az indulástól számított 5 óra 40 perc elteltével?

Mo: 5h40min-kor(340 min-kor)  $v=\text{áll.}$  feltételezéssel  $s\sim t$  miatt  $\frac{s_{\text{eddig}}}{s_{\text{ezután}}} = \frac{340}{60} = \frac{17}{3}$ , tehát a 100 km-t 17:3 arányban osztva 15 km van hátra.