Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2004/2005 9. évfolyam 3. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Legyen P egy (nem elfajuló) paralelogramma belső pontja. Húzzunk P-n keresztül a paralelogramma oldalaival párhuzamos egyeneseket. Ezek a paralelogrammát a T_1, T_2, T_3, T_4 területű részekre bontják fel úgy, hogy $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4$. Legfeljebb hányadrésze lehet T_2 a paralelogramma területének?

2. feladat

A k, m, n egész számokra teljesül, hogy $n+1=k^3m-2km$ és $n+2=(km+1)^2$. Mennyi lehet a $kmn+1$ értéke?

3. feladat

Értelmezzük a valós számok halmazán a következő függvényeket:

$$f_1(x) = \big||x| - 1\big| \quad \text{és} \quad f_n(x) = \left|f_{n-1}(x) - n\right|, \quad \text{ha} \quad n \geq 2\,!$$

Az $f_n(x)$ függvénynek zérushelyei a $-S_n$ és S_n számok, ahol S_n az első n pozitív egész szám összege.

a) Mutassa meg, hogy az $f_n(x)$ függvénynek a $-S_n$ és S_n számokon kívül más zérushelye nincs.

b) Jelölje $T(n)$ az f_n függvény grafikonja és az x tengely közti terület mértékszámát a $[-S_n; S_n]$ intervallumban. Bizonyítsa be, hogy $T(n)$ egész szám!

c) Mely $n \geq 2$ egész számokra lesz $T(n)-T(n-1)$ osztható 2005-tel?