Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan egész számokból álló $(x;y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2005}$ teljesül?

Megoldás. Az egyenlet alapján $x\neq 0$, $y\neq 0$.

$\frac{1}{2005}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ szerint $y=\frac{2005x}{x-2005}$, hiszen $x=2005$ amúgy sem megoldás. 1 pont

A kapott alak rendezéssel

$$y=\frac{2005(x-2005)+2005^2}{x-2005},\quad \text{azaz}\quad y=2005+\frac{2005^2}{x-2005}$$

alakú lesz, ahonnan $(x-2005)(y-2005)=2005^2$ adódik. 1 pont

2005 prímtényezős felbontása $5\cdot 401$, így 2005^2 pozitív osztóinak száma $2005^2=5^2\cdot 401^2$ alapján 9. 1 pont

Az $x-2005$ tényező lehetséges pozitív értékei így 1, 5, 25, 401, 2005, 10 025, 160 801, 804 005, 2005^2, azaz számuk 9 darab (a pozitív osztók száma).

Ha tehát $x-2005>0$, akkor 9 megoldás van. 1 pont

Az $x-2005<0$ esetben nem megfelelő a $(-2005)(-2005)$ szorzat, amikor $x=y=0$ lenne.

Ebben az esetben tehát csak 8 megoldás van. 2 pont

Az eredeti egyenlet megoldásainak száma így $9+8=17$. 1 pont

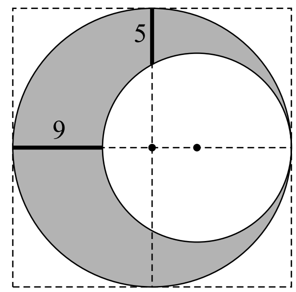
A 17 darab megoldás természetesen meg is adható, de ezt a feladat nem kérte.

Összesen: 7 pont

2. A szultán kastélya egy négyzet alakú területen épült, és félhold alakú tó veszi körül, az ábrán látható módon.

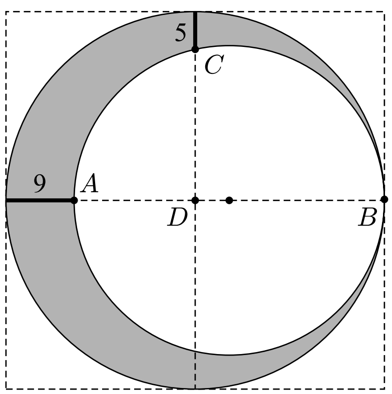
A tavon két híd vezet át, melyek egyenese átmegy a négyzet középpontján. A hidak hossza 5 és 9 méter.

Mekkora a négyzet alakú terület?



Megoldás. Az ABC háromszög C-nél derékszögű, a Thalész-tétel miatt. 1 pont

Jelölje a négyzet oldalának felét x! Az AD, BD és CD szakaszok hossza kifejezhető x segítségével: $AD = x - 9$, $BD = x$, $CD = x - 5$. 1 pont



Az ADC, BDC, ABC derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tételek alapján:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2 + CD^2 + DB^2,$$ 1 pont

vagyis

$$(2x-9)^2 = (x-9)^2 + (x-5)^2 + (x-5)^2 + x^2.$$ 1 pont

Innen

$$4x^2 - 36x + 81 = 4x^2 - 38x + 131,$$ 1 pont

tehát

$$2x = 50.$$ 1 pont

A szultán kastélya egy 50 méter oldalhosszúságú területen épült. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Ha $x < -1$, akkor mi az

$$\left| x^{-1} - \frac{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \right|$$

kifejezés legkisebb értéke?

Megoldás. A kifejezés minden $x < -1$ számra értelmezve van. A kifejezést átalakítva $\left|\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - (1-x)\right|$, azaz $\left|\frac{1}{x+1} + x - 1\right|$ adódik. 1 pont

$\left|\frac{1}{x+1} + x - 1\right| = \left|\frac{1}{x+1} + (x+1) - 2\right|$, ahol az abszolút érték jelén belül az $(x+1)$ szám és reciprokának összege áll. 1 pont

A feltétel szerint $x+1<0$, ezért

$$\left|\frac{1}{x+1}+(x+1)-2\right| = \frac{1}{-x-1}+(-x-1)+2, \quad \text{ahol} \quad -x-1>0.$$ 1 pont

Mivel egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, ezért

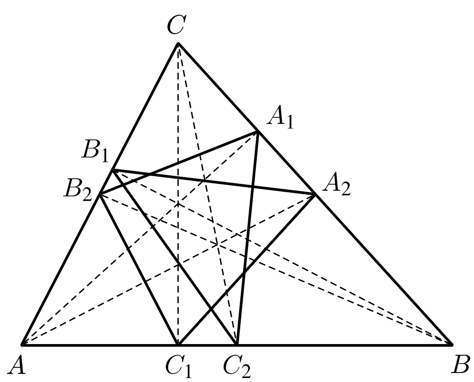
$$\frac{1}{-x-1}+(-x-1)+2 \geqq 2+2=4.$$ 2 pont

A kifejezés legkisebb értéke 4, ekkor $-x-1=1$, azaz $x=-2$; a feltételeknek megfelelően.
2 pont

Összesen: 7 pont

4. Az ABC háromszögben AA_1, BB_1, CC_1 magasságok, AA_2, BB_2, CC_2 súlyvonalak. Bizonyítsuk be, hogy az $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ töröttvonal hossza az ABC háromszög kerületével egyenlő!

Megoldás.



Thalész tételének megfordítása értelmében az A_2 pont a CC_1B és a BCB_1 derékszögű háromszögek köré írt kör középpontja, így

$$A_2B_1 = C_1A_2 = \frac{1}{2}BC.$$ 2 pont

Hasonlóan a B_2 pont az AC_1C és az AA_1C derékszögű háromszögek köré írt kör középpontja, azaz:

$$A_1B_2 = B_2C_1 = \frac{1}{2}AC.$$ 2 pont

Ugyanígy a C_2 pont az ABA_1 és az ABB_1 derékszögű háromszögek köré írt kör középpontja, tehát:

$$B_1C_2 = C_2A_1 = \frac{1}{2}AB.$$ 2 pont

Ezt felhasználva:

$$A_2B_1+B_1C_2+C_2A_1+A_1B_2+B_2C_1+C_1A_2 =$$
$$= \frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC = AB+BC+AC=K,$$

ahol K a háromszög kerülete. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

Megoldás. Az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot használjuk az egyenlet bal oldalára:

$$\big((x+2)^2 - x^2\big)\big((x+2)^2 + x^2\big) = y^3. \qquad \text{1 pont}$$

Az azonosságot ismét alkalmazzuk a bal oldal első tagjára:

$$(x+2-x)(x+2+x)(2x^2+4x+4) = y^3.$$

És kiemeljük a ketteseket:

$$2^3(x+1)(x^2+2x+2) = y^3. \qquad \text{1 pont}$$

A második zárójelben teljes négyzetté alakítjuk a kifejezést

$$(x+1)\big((x+1)^2+1\big) = \left(\frac{y}{2}\right)^3. \qquad \text{1 pont}$$

Az $(x+1)$ és az $\big((x+1)^2+1\big)$ relatív prím, ezért csak akkor lesz a baloldal is teljes harmadik hatvány, ha $(x+1)$ is egy köbszám, és az $(x+1)^2+1$ is egy köbszám.

$$(x+1) = a^3$$
$$\big((x+1)^2+1\big) = b^3,$$

ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. 2 pont

Tehát $\left(a^3\right)^2 + 1 = b^3$, ahol $\left(a^3\right)^2 \geqq 0$, és $\left(a^2\right)^3 + 1 = b^3$ ezért a szomszédos nem negatív egészek köbének különbségét vizsgálva – ami szigorúan monoton nő – adódik az $a = 0$, és $b = 1$. 1 pont

(Itt hivatkozhatunk arra is, hogy ha az $b^3 - a^6 = 1$ egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk:

$$b^3 - a^6 = (b-a^2)(b^2+ba^2+a^4) = 1.$$

Mivel a és b egész számok, ezért vagy

$$(b-a^2) = 1 \quad \text{és} \quad (b^2+ba^2+a^4) = 1 \quad \text{vagy} \quad (b-a^2) = -1 \quad \text{és} \quad (b^2+ba^2+a^4) = -1.$$

Az egyenletrendszereket megoldva is a $a = 0$, és $b = 1$ megoldást kapjuk.

Innen $x = -1$ és $y = 0$ az egyetlen lehetséges megoldás, és ez a számpár valóban kielégíti az egyenletet. 1 pont

Összesen: 7 pont

AZ I. KATEGÓRIA DOLGOZATAINAK TOVÁBBJUTÁSI PONTHATÁRA 15 PONT