Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $\left(\sqrt{2}-1\right)^6=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ egyenletet!

Megoldás.

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}=3-\sqrt{8}.$ 1 pont

$\left(\sqrt{2}-1\right)^4=\left(3-\sqrt{8}\right)^2=17-6\sqrt{8}.$ 2 pont

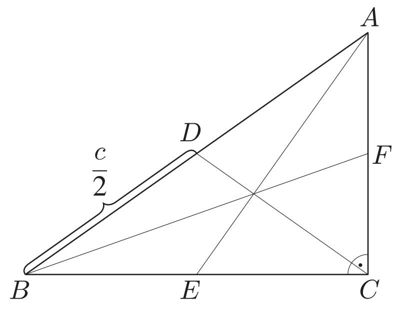
$\left(\sqrt{2}-1\right)^6=\left(3-\sqrt{8}\right)\cdot\left(17-6\sqrt{8}\right)=99-35\sqrt{8}=\sqrt{9801}-\sqrt{9800}.$ 3 pont

Tehát az egyenlet megoldása $m=9801$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor a szerkesztett háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz.

Megoldás.



Tekintsük az a, b, c oldalú háromszöget és használjuk az ábra jelöléseit: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Az ábra jelölései alapján Thalész tétele szerint a CD súlyvonalra $CD^2=\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2}{4}$ teljesül. 1 pont

Pitagorasz tétele szerint pedig az AE és BF súlyvonal négyzete: $BF^2=a^2+\dfrac{b^2}{4}$, $AE^2=\dfrac{a^2}{4}+b^2$. 1 pont

Amennyiben $a\geqq b$ teljesül, akkor $BF\geqq AE$, ahol $CD^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}$ alapján $CD<BF$ és $CD<AE$.

Ha a szerkesztendő háromszög derékszögű, akkor átfogója csak BF hosszú lehet. 1 pont

A kapott háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva $a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, ahonnan $a = b\sqrt{2}$ adódik. 1 pont

Ha viszont $a = b\sqrt{2}$, akkor az eredeti háromszög oldalainak négyzete pedig: $BF^2 = \frac{9}{4}b^2$, $AE^2 = \frac{6b^2}{4}$, $CD^2 = \frac{3}{4}b^2$, így az új oldalak hossza rendre $b \cdot \frac{3}{2}$, $b \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$, $b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

A kapott háromszög oldalainak aránya így $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, ami megegyezik az

$$AB : BC : CA = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$$

aránnyal. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy a két háromszög valóban hasonló. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Milyen n pozitív egész esetén oldható meg az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ xyz &= 2^n \end{aligned} \qquad \text{ha} \quad x, y, z \in \mathbb{Z}?$$

Megoldás.

$$x + y + z = 1 \tag{I}$$
$$xyz = 2^n. \tag{II}$$

Mivel x, y és z mind egészek, ezért (II)-ből következik, hogy mindegyik kettő-hatvány, azaz

$$\begin{aligned} x &= n_x 2^{\alpha_x} \\ y &= n_y 2^{\alpha_y} \\ z &= n_z 2^{\alpha_z} \end{aligned}$$

alakba írható, ahol n_x, n_y és n_z is ± 1 és α_x, α_y és α_z pedig nem-negatív egészek. 1 pont

(I)-ből következik, hogy a három szám egyike páratlan és legalább egy pozitív. Az (I) és (II)-ből együtt következik, hogy kettő negatív szám van x, y és z közt. 1 pont

Mivel x, y és z szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy x a páratlan szám. Ez csak úgy lehet, ha $\alpha_x = 0$ és $n_x = \pm 1$. 1 pont

Ha $n_x = 1$ akkor $x = 1$ pozitív, ezért az y és z mindegyike negatív. De (I)-be visszahelyettesítve $y + z = 0$ adódik, ami ellentmondás, ezért x nem lehet 1. 1 pont

Ha $n_x = -1$ akkor $x = -1$, negatív. Az y és z szerepe szimmetrikus, ezért feltehetjük, hogy az y a pozitív és z a negatív, azaz $n_y = 1$, $n_z = -1$. Az egyenletekbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} y + z &= 2 \\ yz &= 2^n, \end{aligned}$$

az (I)-be visszahelyettesítve

$$2^{\alpha_y} - 2^{\alpha_z} = 2$$
$$2^{\alpha_z}\left(2^{\alpha_y-\alpha_z} - 1\right) = 2.$$

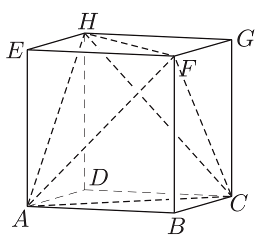
Ebből adódik az $\alpha_z = 1$ és az $\alpha_y = 2$. Tehát $y = 4$ és $z = -2$. 2 pont

A (II)-be helyettesítve: $(-1) \cdot 4 \cdot (-2) = 2^3$. Tehát $n = 3$ esetén van megoldása az egyenletrendszernek az egész számok halmazán. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Válasszunk ki egy kocka csúcsai közül az összes lehetséges módon hármat, és tekintsük a csúcsok által meghatározott háromszögeket! Mekkora a kapott derékszögű háromszögek számának és az összes háromszög számának aránya?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Észrevehetjük, hogy a nem derékszögű háromszögek mindegyik oldala a kocka egy-egy lapátlója. (Azaz a háromszögek szabályosak.) 1 pont

Egy adott csúcsot – például az ábra szerinti A csúcsot – tartalmazó nem derékszögű háromszögek száma 3.

Ezek az (A, C, H), (A, F, C), (A, F, H) csúcshármasokkal adott háromszögek. 1 pont

Ezek szerint minden kockacsúcs pontosan három nem derékszögű háromszögnek csúcsa, ezért a megfelelő nem derékszögű háromszögek száma $\frac{8 \cdot 3}{3} = 8$. 1 pont

A kocka nyolc csúcsa összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg. 1 pont

Ennek megfelelően a derékszögű háromszögek száma $56 - 8 = 48$. 2 pont

A keresett arány így $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Csak ábrával illusztrált és indokolt lépésekre adható – részenként is – teljes értékű pontszám.