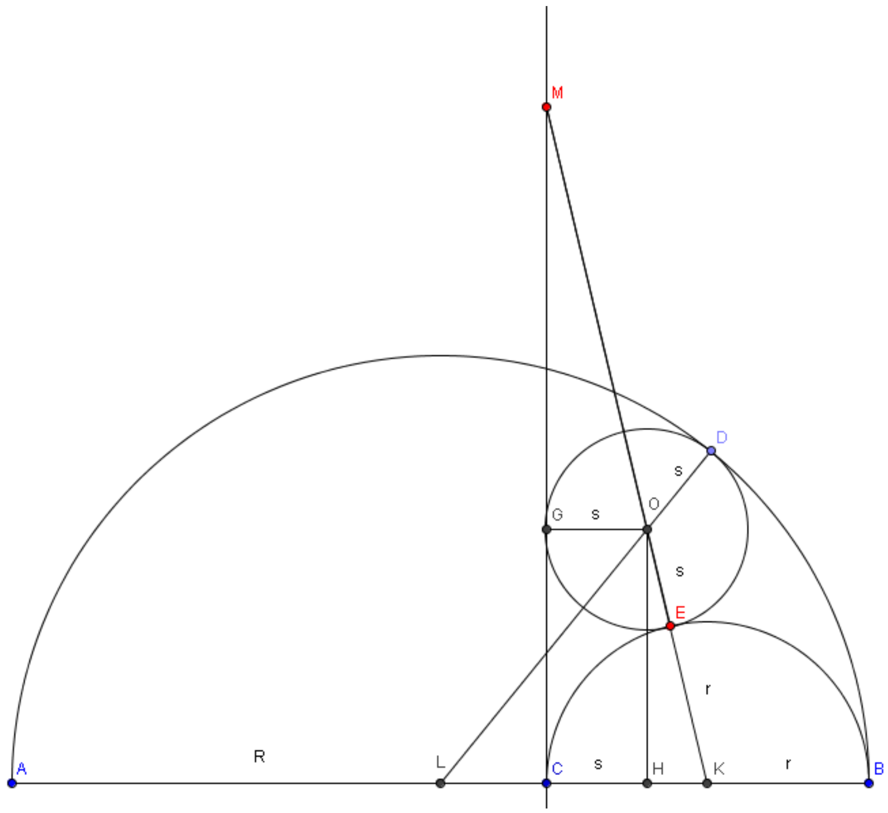
ADh1-3m 0506

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!
$(x+y)^3 = z,\ (y+z)^3 = x,\ (z+x)^3 = y.$

Mo: Két-két egyenletet vonjuk ki egymásból! Ekkor
$(z-x)(x^2+3y^2+z^2+3xy+3yz+xz+1)=0$, hasonlóan adódik a másik két egyenlet is.
1. eset: Ha x,y,z különbözőek, akkor a 2. tényezők nullák.
$x^2+3y^2+z^2+3xy+3yz+xz+1=0$, hasonlóan a másik két egyenlet is. Ezeket összeadva kapjuk a $5(x^2+y^2+z^2)+7(xy+xz+yz)+3=0$ egyenletet, amit átalakítva
$5(x^2+y^2+z^2)+3{,}5((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))+3=0$, azaz
$1{,}5(x^2+y^2+z^2)+3{,}5(x+y+z)^2+3=0$, ami ellentmondás.
2.eset: Ha pl. x=z, akkor $(x+y)^3 = x,\ (2x)^3 = y,$ amiből kivonás után
$(y-x)(7x^2+4xy+y^2+1)=0$ egyenletet kapjuk, amit alakítva a
$(y-x)((2x+y)^2+3x^2+1)=0$ alaknál a 2. tényező biztosan legalább 1, így y=x, azaz
x=y=z, tehát $(2x)^3 = x$ egyenletből x lehet 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$.

2. Az AB szakasz egy belső pontja C, amire AC>CB. Az AB és BC szakaszok, mint átmérő fölé (AB azonos oldalán) félköröket rajzolunk, legyenek ezek rendre k_1 és k_2. Az AB-re C-ben állított merőleges *m*. A *k* kör érinti az *m* egyenest, a k_2 félkört kívülről, a k_1 félkört pedig belülről. Legyen *k* középpontja *O*, és jelölje *k* és k_2 érintési pontját *E*. Végül az *OE* egyenes és *m* metszéspontja *M*. Mutassa meg, hogy *AC=EM!*

Mo: Legyen AL=R, KB=r, GO=s. OLK háromszögből OH magasságra kétféleképpen Pitagorasz tételből: $(R-s)^2-(R-2r+s)^2=(r+s)^2-(r-s)^2$, amiből $s=\frac{(R-r)r}{R}$,
$OMG\Delta \sim OHK\Delta$, amiből $\frac{OM}{s}=\frac{r+s}{r-s}$. Ezeket felhasználva $EM = OM+s = 2(R-r)$,
másrészt $AC = 2R-2r = 2(R-r)$.



3. Nevezzünk egy halmazt csonkának, ha nincs két – nem feltétlenül különböző – elem a halmazban, aminek az összege is eleme a halmaznak. Mekkora a $\{1,2,3,...,2n+1\}$ halmaz maximális elemszámú csonka részhalmaza?
Mo: n+1 elemű csonka részhalmaz biztosan van. (n+1; n+2;…;2n+1 elemek jók)
Ha lenne n+2 elemű csonka halmaz, akkor abban bármely két elem különbsége nem eleme a halmaznak. De a n+2 db legnagyobbikát kiválasztva és abból a többi n+1 elemet külön-külön kivonva, n+1 db [1;max.elem]intervallumba eső, tehát $\{1,2,3,...,2n+1\}$-ba eső a csonka halmaz elemeitől különböző n+1 db elemet kapnék, amik egymástól is különbözők, ami lehetetlen, mert n+1+n+2>2n+1.