

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2006/2007-es tanév**  
**2. forduló**  
**haladók I. kategória**

**Feladatok**

1. Mennyi lesz a  $\left(\left(\left(\dots(7^7)^7\right)^7\dots\right)^7\right)^7$  kifejezés utolsó jegye, ha 2006-szor végeztük el a 7. hatványra emelést?

2. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló  $(x; y)$  számpárokat, melyre teljesül, hogy

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 2x + 84.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap átlói által bezárt kisebbik szög  $30^\circ$ , akkor a téglalap belső szögfelezői által közrefogott négyszög területe megegyezik a téglalap területével.

4. A Tour de Hongrie kerékpáros körverseny távja 777 km. A szervezők, hogy megkönnyítsék a versenyzők dolgát, valamennyi résztvevőnek egy olyan kijelzőt adtak, amelyen kilométerenként felvillan a már megtett és a még hátralévő távolság. Azaz az indulás pillanatában (000; 777), a célba érkezéskor (777; 000), közben például (097; 680) látható a kijelzőn.

Hány esetben fordul elő, hogy a kijelzőn felvillanó számsorban pontosan kétféle számjegy található?