Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. 2008 darab pozitív egész szám szorzata egyenlő az összegükkel. Közülük a legkisebb k-szor fordul elő az előállításban. Igazoljuk, hogy $1996 < k \leqq 2006$.

Megoldás. Feltehetjük, hogy $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2008}$ a számok nagyság szerinti sorrendje, ahol $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2008} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2008}$ teljesül. Feltételeink alapján ekkor

$$(*) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2007} = \frac{x_1}{x_{2008}} + \frac{x_2}{x_{2008}} + \ldots + \frac{x_{2007}}{x_{2008}} + 1 \leqq 2008.$$ 1 pont

Az x_1 (legkisebb) szám értéke így csak 1 lehet, mert $x_1 \geqq 2$ esetén

$$2^{2007} \leqq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2007} \leqq 2008$$

nem teljesül.

Ha most az 1-esek száma ($x_1 = 1$) k, akkor $(*)$ alapján $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{2007} \leqq 2008$, ahol $x_{k+1} \geqq 2$.

Így $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{2007} \geqq 2^{2007-k}$, ezért $2^{2007-k} \leqq 2008 < 2^{11}$. 2 pont

A 2 hatványainak szigorú monotonitása miatt $2007 - k < 11$, azaz $1996 < k$, amit bizonyítani akartunk. 1 pont

Másrészt k értéke nyilvánvalóan nem lehet 2008, sem pedig 2007, mert az eredeti egyenlet alapján $1 \neq 2008$, illetve $x_{2008} \neq 2007 + x_{2008}$. 1 pont

k értéke viszont már 2006 lehet, hiszen ekkor az $x_{2007} \cdot x_{2008} = 2006 + x_{2007} + x_{2008}$ egyenlet alapján

$$x_{2008} = \frac{x_{2007} + 2006}{x_{2007} - 1}.$$

A kapott egyenletnek pedig van a feltételeknek megfelelő megoldása. Például $x_{2007} = 2$, $x_{2008} = 2008$.

Tehát valóban igaz, hogy $k \leqq 2006$. 2 pont

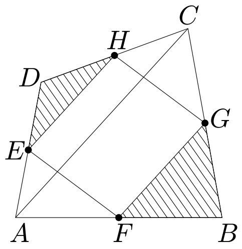
Összesen: 7 pont

2. Egy konvex négyszög középvonalai a szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok. Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy területe megegyezik középvonalai hosszának szorzatával.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $AC = BD$, vagyis, hogy a négyszög átlói egyforma hosszúak!

Van-e a téglalapokon kívül más olyan négyszög, ami ilyen tulajdonságú, azaz olyan, hogy területe megegyezik középvonalai hosszának szorzatával?

Megoldás.



EH és FG párhuzamosak AC-vel és fele olyan hosszúak. Tehát $EFGH$ paralelogramma, aminek oldalai hossza a négyszög átlóinak fele. 1 pont

Továbbá $T_{EHD} = \frac{1}{4}T_{ACD}$, $T_{FGB} = \frac{1}{4}T_{ACB}$, amiből az következik, hogy az *ábrán* besatírozott rész a négyszög területének negyede. 1 pont

Ebből következően $EFGH$ paralelogramma területe a négyszög területének fele. (Hiszen hasonlóan $T_{AEF} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABD} \wedge$ $\wedge\ T_{CHG} = \frac{1}{4} \cdot T_{CDB}$.) 1 pont

Egy paralelogramma területe nem nagyobb átlói szorzatának felénél, egyenlőség csak akkor van, ha az átlók merőlegesek, vagyis a paralelogramma rombusz. 1 pont

Vagyis a négyszög területe csak akkor lehet egyenlő középvonalai szorzatával, ha azok merőlegesek, és ebből következően $EH = HG$, vagyis $AC = BD$, amit bizonyítani kellett. 1 pont

A téglalapon kívül bármilyen olyan konvex négyszög is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, aminek átlói egyenlő hosszúak, vagyis pl. az egyenlő szárú trapézra is igaz, hogy területe megegyezik középvonalai hosszának szorzatával. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy szabályos n-szög csúcsaihoz tetszőleges módon a „$-$” vagy a „$+$” előjelet rendeljük hozzá. Egy lépésben bármely három szomszédos csúcs előjelét megváltoztatjuk.

a) Igazoljuk, hogy $n = 2008$ esetén bármely kezdőhelyzetből indulva elérhető, hogy mindegyik csúcs előjele „$+$” legyen.

b) Bizonyítsuk be, hogy $n = 2007$ esetén van olyan kiindulási helyzet, amelyből az adott lépés többszöri alkalmazásával soha nem érhető el, hogy mindegyik csúcs előjele „$+$” legyen.

Megoldás. a) Legyenek a csúcsok rendre 1, 2, 3, …, 2008 jelűek! Haladjunk végig az $(1;2;3)$, $(2;3;4)$, $(3;4;5)$, …, $(2006;2007;2008)$ csúcshármasokon aszerint, hogy a számhármasok első tagja pozitív vagy negatív előjelű-e egy-egy lépés megtétele előtt.

Ha 1 „$+$” előjelű, akkor a $(2;3;4)$ számhármassal folytatjuk, ha pedig 1 „$-$” előjelű, akkor megváltoztatjuk az $(1;2;3)$ csúcshármas előjelét.

Eljárásunkat a $(2;3;4)$ csúcshármassal folytatva, és a $(2006;2007;2008)$ csúcshármassal befejezve elérhetjük, hogy az első 2006 darab csúcs mindegyikének előjele „$+$” legyen.

– Ha a maradék két csúcs közül mindkettő előjele „+”, akkor készen vagyunk. 1 pont

– Ha a maradék két csúcs közül pontosan egy „–” előjelű, akkor a többi 2007 darab csúcsot hármasával tagolva mindegyik csúcs előjelét negatívra változtathatjuk.

Ha pedig már mindegyik csúcs „–” előjelű, akkor minden megengedett számhármas előjelét pontosan egyszer megváltoztatva mind a 2008 darab csúcs előjele „+” lesz, hiszen minden csúcs három hármasban szerepel, tehát háromszor váltunk előjelet. 1 pont

– Ha pedig a maradék két csúcs közül mindkettő „–” előjelű, akkor egy, az azokat tartalmazó számhármas előjeleinek megváltoztatásával az előző esethez jutunk, amit pedig már megoldottunk. 1 pont

b) Ha a csúcsok rendre 1, 2, 3, …, 2007 jelűek, akkor (például) ha az 1 jelű csúcs „–”, az összes többi pedig „+”, nem lehet elérni azt, hogy mindegyik csúcs „+” legyen.

Állításunkat indirekt módon igazoljuk.

Tegyük fel, hogy elérhető a kívánt elrendezés.

Ekkor az egyes, megengedett lépést az összes lehetséges

$$(1;2;3),\ (2;3;4),\ \ldots,\ (2005;2006;2007),\ (2006;2007;1),\ (2007;1;2)$$

számhármason rendre x_1-szer, x_2-ször, …, x_{2007}-szer végrehajtva x_i $(i = 1, 2, \ldots, 2007)$ jelváltásainak számára a következő összefüggések adódnak:

$i=1$	(2006):	$x_{2006}+x_{2007}+x_1=\mathrm{pl}$	(páratlan szám)	1 előjele alapján
$i=2$	(2007):	$x_{2007}+x_1+x_2=\mathrm{p}$	(páros szám)	2 előjele alapján
$i=3$	(1):	$x_1+x_2+x_3=\mathrm{p}$		3 előjele alapján
$i=4$	(2):	$x_2+x_3+x_4=\mathrm{p}$		4 előjele alapján
$i=5$	(3):	$x_3+x_4+x_5=\mathrm{p}$		5 előjele alapján
$\vdots$				$\vdots$
$i=2006$	(2004):	$x_{2004}+x_{2005}+x_{2006}=\mathrm{p}$		2006 előjele alapján
$i=2007$	(2005):	$x_{2005}+x_{2006}+x_{2007}=\mathrm{p}$		2007 előjele alapján

Összefüggéseink alapján

(1) – (2) szerint	$x_1-x_4=\mathrm{p}$	
(4) – (5) szerint	$x_4-x_7=\mathrm{p}$	
(7) – (8) szerint	$x_7-x_{10}=\mathrm{p}$	
$\vdots$	$\vdots$	
(2002) – (2003) szerint	$x_{2002}-x_{2005}=\mathrm{p}.$	1 pont

Az utóbb kapott összefüggések megfelelő oldalainak összegzésével $x_1-x_{2005}=\mathrm{p}$ adódik. 1 pont

Viszont (2006) – (2005) alapján $x_1-x_{2005}=\mathrm{pl}-\mathrm{p}$, ami páratlan értékű, ez pedig ellentmondás, tehát az adott kiindulási helyzetből valóban nem érhető el a véghelyzet. 2 pont

Összesen: 7 pont