Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely x és y egész számokra igaz, hogy $x^2 + yx = 36$ és $y^2 + yx = 45$? (6 pont)

1. megoldás. Mivel $x^2 + yx = x(x + y)$ és $y^2 + yx = y(y + x)$, (1 pont)

a két egyenletet elosztva egymással, azt kapjuk, hogy $\frac{x}{y} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$, azaz $y = \frac{5x}{4}$. (2 pont)

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x^2 + \frac{5x^2}{4} = 36$, amiből $x = \pm 4$. Így a megoldások: $x = 4$, $y = 5$ vagy $x = -4$, $y = -5$. (2 pont)

A kapott számpárokra teljesül a feladat feltétele. (1 pont)

2. megoldás. A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $(x + y)^2 = 81$, azaz $x + y = \pm 9$. (3 pont)

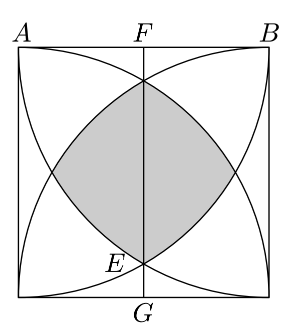
Ezt az $x(x + y) = 36$ alakban felírható első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x = \pm 4$. Így a megoldások: $x = 4$, $y = 5$ vagy $x = -4$, $y = -5$. (2 pont)

A kapott számpárokra teljesül a feladat feltétele. (1 pont)

3. megoldás. (vázlat). A második egyenlet $y(y+x) = 45$ alakban írható. Ezért y a 45 egyik egész osztóinak egyike.

2. Egy 8 cm oldalú négyzet síkjában lévő P pont a négyzet mind a négy csúcsától legfeljebb 8 cm távolságra van. Igazolja, hogy P a négyzet minden oldalától legalább 1 cm távolságra van! (6 pont)

Megoldás.



P annak a négy 8 cm sugarú körlemeznek a K közös részében van, amelyek középpontjai a négyzet csúcsai. Ld. az ábrát!

A négyzet szimmetriái miatt K minden pontja a négyzet oldalaitól legalább EG távolságra van. (2 pont)

ABE egy 8 cm oldalú szabályos háromszög. Ennek az FE magassága: $4\sqrt{3}$. (1 pont)

Így $EG = FG - FE = 8 - 4\sqrt{3} > 1$, hiszen ez ekvivalens azzal, hogy $\dfrac{7}{4} > \sqrt{3}$, ami igaz, hiszen $\dfrac{49}{16} > 3$. (3 pont)

3. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108? (8 pont)

Megoldás. Ha egy számnak négy osztója van, akkor az p^3 vagy pq alakú, ahol p és q különböző prímszámok. (2 pont)

$a)$ Ha a szám p^3 alakú, akkor osztóinak összege: $1 + p + p^2 + p^3$. Ez $p = 2$ és $p = 3$ esetén 108-nál kisebb, $p \geqq 5$ esetén 108-nál nagyobb. (2 pont)

$b)$ Ha a szám pq alakú, akkor osztóinak összege: $1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$. Tehát $(1 + p)(1 + q) = 108$.

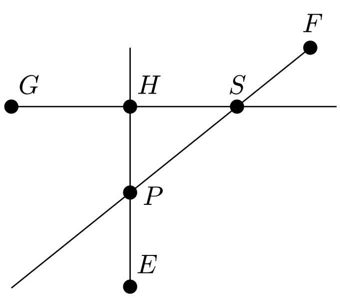
Legyen $p < q$. A $p = 2$ nem jó, mert ekkor $q = 35$ lenne, ami nem prímszám. (1 pont)

Ha $p > 2$, akkor az $1 + p$ és $1 + q$ ($4 \leqq 1 + p < 1 + q$) páros számok szorzata $108 = 4 \cdot 27$. Tehát $1 + p = 6$ és $1 + q = 18$, azaz $p = 5$ és $q = 17$.

Így egyetlen megfelelő szám van, ami a 85. (3 pont)

4. Adott egy háromszög, melybe rajzolható három kör, melyek egymást kívülről érintik és mindegyik kör a háromszög oldalai közül pontosan kettőt érint. Mutassa meg, hogy a körök belső közös érintőegyenesei egy pontban metszik egymást! (10 pont)

1. megoldás. Jelölje a közös belső érintőkön az érintési pontokat E, F és G. Tehát e pontokon átmenő három érintőegyenesről kell belátni, hogy egy ponton mennek át. (Az érintők között nincs két párhuzamos, mert a rájuk merőleges – a körök középpontjait összekötő – egyenesek között sincs.) Tegyük fel, hogy ez a három egyenes nem egy ponton megy át, azaz keletkeznek P, S és H metszéspontok. Ekkor az érintőszakaszok egyenlőségéből következnek az alábbi irányított szakaszokra igaz egyenlőségek:



$$PE = PF = PS + SF,$$
$$SF = SG = SH + HG, \quad \text{(5 pont)}$$
$$HG = HE = HP + PE.$$

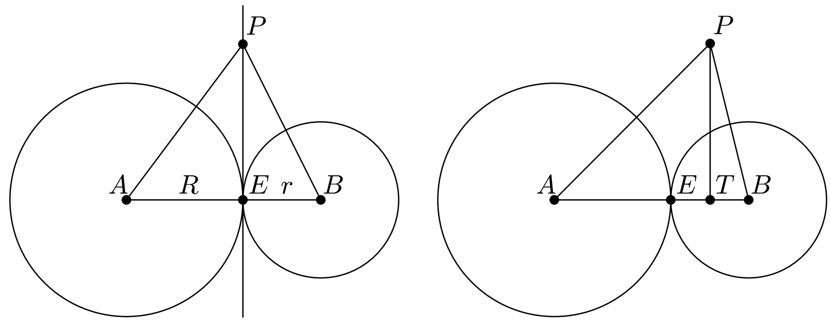
Tehát:

$$PE = PS + SF = PS + SH + HG = PS + SH + HP + PE. \quad \text{(3 pont)}$$

és így: $PS + SH + HP = 0$, azaz a három pontnak egybe kell esnie. (2 pont)

Megjegyzések. Van a feladat szövegének megfelelő háromszög, pl. a szabályos háromszög. Ha a három érintő közös pontja O, akkor $OE = OF = OG$. Tehát O a három kör középpontjai által adott háromszög beírt körének a középpontja.

2. megoldás.



Érintsék az A középpontú R sugarú és B középpontú r sugarú körök egymást kívülről az E pontban és legyen az érintő egy – E-től különböző – pontja P. A PAE és PBE derékszögű háromszögekre felírva Pitagorász tételét és a két egyenlőséget kivonva egymásból azt kapjuk, hogy:

$$PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2 \qquad \text{(3 pont)}$$

(ez igaz akkor is, ha P egybeesik az E-vel).

Legyen most P a sík egy olyan pontja, amely nincs rajta a középpontokat összekötő egyenesen és amelyre teljesül, hogy:

$$PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2.$$

Legyen P-nek az AB egyenesére eső vetülete T! A PAT és PBT derékszögű háromszögekre felírva Pitagorász tételét és a két egyenlőséget kivonva egymásból azt kapjuk, hogy az AT, TB irányított szakaszokra:

$$PA^2 - PB^2 = AT^2 - TB^2.$$

Tehát:

$$AT^2 - TB^2 = R^2 - r^2, \quad \text{azaz} \quad (AT + TB)(AT - TB) = (R + r)(R - r).$$

Mivel $AT + TB = R + r$, azt kapjuk, hogy az AT és TB irányított szakaszokra $AT - TB = R - r$, ami azt jelenti, hogy T egybeesik E-vel. Ha P az AB egyenesének egy pontja, akkor P egybeesik T-vel és az előbbiek alapján az E-vel. Tehát a sík azon P pontjainak halmaza, amelyre:

$$PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2$$

az érintő egyenes pontjai. (3 pont)

Alkalmazzuk most az elmondottakat a feladatban szereplő O_1, O_2, O_3 középpontú, r_1, r_2, r_3 sugarú körökre! (Nyilvánvaló, hogy O_1, O_2, O_3 nincsenek egy egyenesen, ezért a rájuk merőleges érintők között nincs két párhuzamos.)

Legyen az O_1 és O_2 középpontú körök belső érintőjének az O_2 és O_3 középpontú körök belső érintőjével való metszéspontja P. Ekkor az előbbiek alapján:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

$$PO_2^2 - PO_3^2 = r_2^2 - r_3^2.$$

A két egyenlőséget összeadva azt kapjuk, hogy:

$$PO_1^2 - PO_3^2 = r_1^2 - r_3^2.$$

Így ismét az elmondottak alapján P rajta van az O_1 és O_3 középpontú körök belső érintőjén, tehát P a három érintőegyenes közös pontja. (4 pont)

5. Julcsi ebben félévben matematikából csak négyes és ötös osztályzatot kapott. Négyesből 4 darabot és ötösből 5 darabot. Hányféle sorrendben kaphatta ezt a 9 darab osztályzatot, ha soha nem kapott egymás után kettő darabnál több négyes osztályzatot? (10 pont)

Megoldás. Az ötös osztályzatokat nézve 6 helyen lehetnek a négyes osztályzatok: az első ötös osztályzat előtt, az első és a második ötös osztályzat között, a második és a harmadik ötös osztályzat között stb.

$a)$ Ha nem kapott Julcsi két négyes osztályzatot egymás után, akkor a négy darab négyes osztályzat az ötösök által kijelölt 6 helyből $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választható ki. (2 pont)

$b)$ Ha kétszer kapott egymás után négyes osztályzatot akkor ez a két, egyenként két négyes osztályzatból álló lehetőség az ötösök által kijelölt 6 helyből $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választható ki. (3 pont)

$c)$ Ha pontosan egyszer kapott egymás után két négyes osztályzatot, akkor ez a két egymás utáni négyesből és két nem egymás utáni négyesből álló lehetőség az ötösök által kijelölt 6 helyből $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen választható ki, de a két egymás utáni négyes lehet a két különálló négyes előtt, közte és utána, tehát ebben az esetben $20 \cdot 3 = 60$ sorrendet kapunk. (4 pont)

Eredményeink alapján Julcsi 90-féle sorrendben kaphatta osztályzatait. (1 pont)