Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy háromszög csúcsain át összesen 2009 db egyenest fektetünk úgy, hogy minden egyenes kettévágja a háromszöget, és a csúcsokon kívül egyetlen metszésponton sem megy át kettőnél több egyenes. Mutassa meg, hogy a háromszögben keletkezett tartományok száma kevesebb, mint $1{,}4 \cdot 10^6$.

Megoldás. Jelöljük a három csúcsból indított egyenesek számát rendre n, k, illetve l-lel. Az első csúcsot tekintve, az onnan indított n db egyenes $n+1$ tartományra bontja a háromszöget. A következő csúcsból indított k db egyenes mindegyike metszi az előbb behúzott n db egyenest, ezért pontosan $n+1$ új tartomány keletkezik mindegyik behúzásakor. Összesen tehát $k \cdot (n+1)$ új tartományt kapunk ebben a lépésben. A harmadik csúcsból indított l db egyenes a már behúzott $n+k$ db egyenes mindegyikét metszi, minden újabb egyenes behúzásakor tehát $n+k+1$ db új tartomány keletkezik, összesen $l \cdot (n+k+1)$ db. Mindösszesen tehát

$$T = (n+1) + k \cdot (n+1) + l \cdot (n+k+1) = (n \cdot l + k \cdot l + n \cdot k) + n + k + l + 1$$

tartományt kapunk. Az

$$n \cdot l + k \cdot l + n \cdot k \leqq \frac{(n+k+l)^2}{3}$$

egyenlőtlenség 6-tal szorozva és átrendezve a $0 \leqq (n-k)^2 + (n-l)^2 + (k-l)^2$ egyenlőtlenségre vezet, tehát igaz.

Így $T \leqq \dfrac{2009^2}{3} + 2010 < 1{,}4 \cdot 10^6$.

2. Három szomszédos pozitív egész szám mindegyike két különböző prímszám szorzata. Vegyük az így adott hat prímszám közül a két legkisebbet és a két legnagyobbat. Lehet-e ennek a négy prímszámnak az összege 2009?

Megoldás. Mondjuk azt, hogy egy pozitív egész szám K tulajdonságú, ha két különböző prímszám szorzata és legyen a három egymást követő pozitív egész szám a, b, c! Ha a páros, akkor c is. Ekkor a és c közül az egyik 4-gyel is osztható, ami nem lehet K tulajdonságú. Tehát $b = 2p$, ahol p páratlan prímszám. Nem lehet $p = 3$, mert ekkor $a = 5$, ami nem K tulajdonságú. Három egymást követő pozitív egész szám közül az egyik 3-mal osztható. Láttuk, hogy b nem osztható 3-mal, tehát a vagy c osztható 3-mal. Ezért – felhasználva, hogy a és c páratlan és K tulajdonságú – $a = 3q$, vagy $c = 3q$, ahol q 3-nál nagyobb prímszám.

Ha $a = 3q$, $b = 2p$, akkor $c = rs$, ahol r és s 3-nál nagyobb különböző prímszámok, hiszen c K tulajdonságú 3-mal nem osztható páratlan szám.

Ekkor a 2, 3, p, q, r, és s prímszámok közül kell a két legkisebbet és a két legnagyobbat venni. $p > r$, mert ha $r \geqq p$ lenne, akkor $c = rs \geqq ps > p \cdot 3 = 2p + p = b + p > b + 3$ állna fenn, ami nem lehet, mert $c = b + 1$.

Ugyanígy látható be, hogy $p > s$, $q > r$ és $q > s$.

Tehát a két legkisebb a 2 és a 3, a két legnagyobb a p és a q. Ezek összege 2009:

$$2 + 3 + p + q = 2009 \tag{1}$$

és $b = a + 1$:

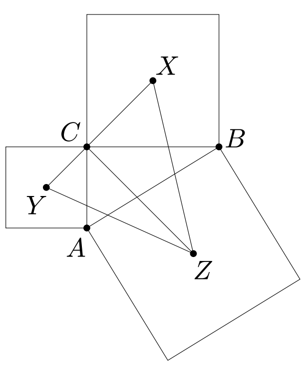
$$2p = 3q + 1. \tag{2}$$

A kapott (1)–(2) egyenletrendszernek nincs megoldása az egész számok halmazán.

Ha $c = 3q$, akkor az előbbiek szinte szó szerint megismételhetők, tehát nem lehet a szóban forgó négy prímszám összege 2009.

3. Az ABC egységnyi területű derékszögű háromszög minden oldalára kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. Ezek középpontja X, Y és Z. Bizonyítsa be, hogy az XYZ háromszög területe legalább 2 egység!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



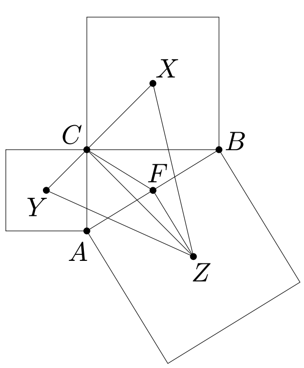
Mivel $YCX\sphericalangle = 45° + 90° + 45° = 180°$, Y, C és X pontok egy egyenesbe esnek.

Be fogjuk bizonyítani, hogy CZ merőleges XY-ra.

Ehhez vegyük fel az átfogó F felezőpontját, és kössük össze a C, illetve a Z ponttal.

Jelölje a CBA szöget β!

A BFC háromszög egyenlőszárú, mivel a Thalész-tétel megfordításának értelmében F a háromszög köré írt kör középpontja, így $FC = FB$. Így az FCB szög is β.



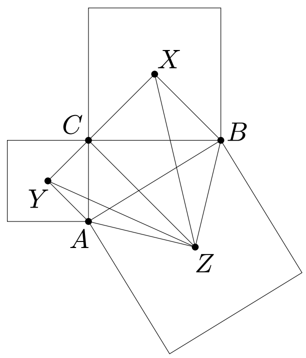
A CFA szög a BFC háromszög külső szöge, így nagysága 2β. A CFZ szög így $90° + 2\beta$. A CFZ háromszög is egyenlőszárú, mivel $FC(= FB) = FZ$. Így a

$$ZFC\sphericalangle = \frac{180° - (90° + 2\beta)}{2} = 45° - \beta.$$

Így

$$ZCX\sphericalangle = ZFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle + BCX\sphericalangle =$$

$$= (45° - \beta) + \beta + 45° = 90°.$$



Vegyük fel az $XBZAY$ ötszöget!

Mivel beláttuk, hogy CZ merőleges XY-ra, és XB is merőleges XY-ra, az XB és a CZ szakaszok párhuzamosak. Ezért az XBZ és az XBC háromszögek területe megegyezik, mivel egybeesik egy oldaluk (XB) és a hozzá tartozó magasságuk (XC) is egyenlő. Így $T_{XBZ} = T_{XBC} = \frac{a^2}{4}$.

Hasonlóan belátható, hogy $T_{YAZ} = T_{YAC} = \frac{b^2}{4}$.

Az ötszög területe:

$$T_{XBZAY} = T_{CXB} + T_{BZA} + T_{AYC} + T_{ABC} = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2}.$$

Így az XYZ háromszög területe:

$$T_{XYZ} = T_{XBZAY} - (T_{XBZ} + T_{YAZ}) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2}\right) - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{c^2}{4} + \frac{ab}{2}.$$

Be kell látnunk, hogy az XYZ háromszög terület legalább 2, azaz $\frac{c^2}{4} + \frac{ab}{2} \geqq 2$.

A feladat feltételei szerint $T_{ABC} = \frac{ab}{2} = 1$. Elég tehát belátnunk, hogy $\frac{c^2}{4} + \frac{ab}{2} \geqq ab$.

Innen a Pitagorasz-tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} \geqq ab$.

Ennek igazolásához szorozzuk mindkét oldalt 4-gyel: $a^2 + b^2 + 2ab \geqq 4ab$.

Ez ekvivalens $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0$ összefüggéssel, ami valóban teljesül. Így az eredeti állítsunk is igaz, azaz $T_{XYZ} \geqq 2$.