Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy nincs megoldása az $x^2 + y^3 = z^4$ egyenletnek, ha x, y és z pozitív prímek!

Megoldás. Átrendezve és szorzattá alakítva az eredeti egyenletet:

$$y^3 = z^4 - x^2 = \left(z^2 - x\right)\left(z^2 + x\right).$$

Mivel y prím, ezért vagy

$$z^2 - x = 1 \quad \text{és} \quad z^2 + x = y^3, \tag{1}$$

vagy

$$z^2 - x = y \quad \text{és} \quad z^2 + x = y^2. \tag{2}$$

3 pont

(1) esetben a $z^2 - x = 1$ átrendezve $(z-1)(z+1) = x$-ből mivel x prím, ezért $z - 1 = 1$, amiből $z = 2$, $x = 3$, $y^3 = 5$ adódik, ami nem megoldása az egyenletnek, mert y nem lesz egész, így prím sem. 2 pont

(2) esetből a két egyenletet z^2-re rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x + y &= y^2 - x, \\ 2x &= y(y-1). \end{aligned}$$

A jobb oldalon két egymás utáni szám szorzata van, így az biztosan páros. Ha y páros, akkor $y = 2$, mivel y prím. Ekkor $x = 1$, ami ellentmondás, mert az 1 nem prím.

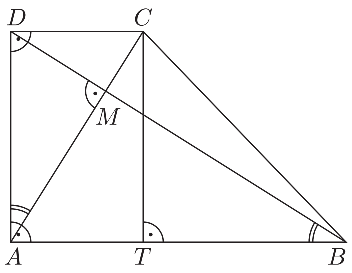
Ha y páratlan, akkor mivel x prím, ezért $x = y\dfrac{y-1}{2}$-ből vagy $y = 1$, vagy $\dfrac{y-1}{2} = 1$, azaz $y = 3$, $x = 3$, $z^4 = 36$ adódik.

Mindkét eset ellentmondás, mert az első esetben y nem prím, második esetben z nem lesz egész, így prím se. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a trapéz területe nem lehet nagyobb az oldalak négyzetének számtani közepénél.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



$$AB = a, \quad BC = b,$$
$$CD = c, \quad DA = d,$$
$$\text{ahol } a \geqq c.$$

Az ACD és BDA háromszögek hasonlóak, mert egy-egy szögük derékszög, a CAD szög és a DBA szög pedig merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

A hasonlóság alapján $d : a = c : d$, azaz $d = \sqrt{ac}$. 1 pont

A CTB derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele alapján $TB = a - c$, $CT = \sqrt{ac}$ felhasználásával $b^2 = \left(\sqrt{ac}\,\right)^2 + (a-c)^2$, azaz $b = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$ adódik. 1 pont

Az $ABCD$ trapéz területe $\dfrac{a+c}{2} \cdot \sqrt{ac} = t$.

A mértani, számtani és négyzetes közepek közötti összefüggés alapján

$$t = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$ 1 pont

Mivel $\dfrac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, ezért $t \leqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{a^2+b^2}{2}$. 1 pont

Az oldalak négyzetének számtani közepe

$$\frac{a^2 + a^2 - ac + c^2 + c^2 + ac}{4} = \frac{a^2+c^2}{2}.$$ 1 pont

Tehát $t \leqq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, ami az állítást igazolja. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés (második megoldás). Az első három pont elérése után $\left(t = \dfrac{a+c}{2}\sqrt{ac}\right)$ azt kell igazolni, hogy $\dfrac{a+c}{2} \cdot \sqrt{ac} \leqq \dfrac{a^2+c^2}{2}$. 1 pont

Az adott egyenlőtlenség korrekt igazolásáért adható pontszám (megfordítással együtt): 3 pont

3. Három gép olyan számkártyákkal működik, amelyeken pozitív egészekből álló rendezett számpárok találhatók. Mindhárom gép új számkártyák kinyomtatására képes, a következő szabályok szerint:

- Az első gépbe az $(a,\ b)$ kártyát táplálva az $(a+1,\ b+1)$ kártyát nyomtatja ki.
- A második gép az $(a,\ b)$ kártya beadására az $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ kártyát adja ki, de csak akkor, ha a és b páros. Más esetekben nem nyomtat.
- A harmadik gépbe két kártyát kell betölteni: az $(a,\ b)$ és $(b,\ c)$ kártyák betöltése esetén az $(a,\ c)$ kártyát nyomtatja ki. Csak akkor nyomtat, ha két olyan kártyát adunk be (megfelelő sorrendben), hogy az első kártya második száma egyenlő a második kártya első számával.

Mindhárom gép visszaadja a betáplált kártyákat is, függetlenül attól, hogy történt-e nyomtatás.

Kezdetben egyetlen kártyánk van, az $(1,\ 27)$. Legyártható-e

$a)$ az $(1,\ 2011)$;

$b)$ a $(99,\ 333)$ kártya?

Megoldás. Az eredeti kártyán lévő számok különbsége $27-1=26$ osztható 13-mal. Bebizonyítjuk, hogy minden kinyomtatható kártya rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Az $a)$ kérdésre ezzel nemleges választ tudunk adni, mivel $2011-1=2010$ nem osztható 13-mal. 1 pont

Nézzük meg minden gépre, mi történik, ha olyan kártyát (kártyákat) táplálunk be, amelyeken a számok különbsége 13-mal osztható.

Ha $13 \mid a-b$, akkor nyilván $13 \mid (a+1)-(b+1)=a-b$. 1 pont

Ha $13 \mid a-b$, akkor $13 \,\Big|\, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, mert 13 páratlan. 1 pont

Végül ha $13 \mid a-b$ és $13 \mid b-c$, akkor $13 \mid (a-b)+(b-c)=a-c$. 1 pont

Tehát beláttuk, hogy az $(1,\ 2011)$ nem állítható elő. Most megmutatjuk, hogy a $(99,\ 333)$ kinyomtatható.

Mivel $333-99=234=18\cdot 13$, arra fogunk törekedni, hogy előállítsuk az $(1,\ 1+18\cdot 13)$ kártyát, mert ebből az első gép 98-szori alkalmazásával eljutunk a kívánt eredményhez. 1 pont

Az első, majd a második gépet használva: $(1,\ 27)\to(2,\ 28)\to(1,\ 14)=(1,\ 1+1\cdot 13)$.

Ha $\left(1,\ 1+2^k\cdot 13\right)$ már megvan, akkor $\left(1,\ 1+2^{k+1}\cdot 13\right)$ a következő módon állítható elő: az első gép ismételt alkalmazásával eljutunk az $\left(1+2^k\cdot 13,\ 1+2^{k+1}\cdot 13\right)$ kártyához, majd a harmadik gépbe töltjük az $\left(1,\ 1+2^k\cdot 13\right)$ és $\left(1+2^k\cdot 13,\ 1+2^{k+1}\cdot 13\right)$ kártyákat. 1 pont

Ezzel minden $k \geqq 0$ egészre előállítottuk az $\left(1,\ 1+2^k\cdot 13\right)$ kártyát.

Az előzőhöz hasonlóan az $(1,\ 1+a\cdot 13)$ és az $(1,\ 1+b\cdot 13)$ kártyákból előállítható az $\left(1,\ 1+(a+b)\cdot 13\right)$, például úgy, hogy a második kártyából legyártjuk az $(1+a\cdot 13,$ $1+b\cdot 13+a\cdot 13)$-at, majd a harmadik gépet használjuk, a korábban látott módon.

Végezetül a 18-at $16+2$ alakban írva $(1,\ 1+18\cdot 13)$ kinyomtatható. 1 pont

Összesen: 7 pont