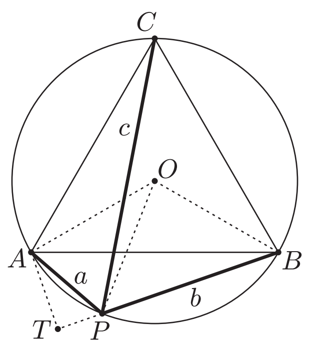
Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az A, B, C szabályos háromszög körülírt körének sugara 1. Legyen a körülírt kör egy P pontjának az A, B, C csúcsokról mért távolsága rendre a, b és c! Határozza meg abc maximumát, ha P befutja a körülírt kört!



Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az abc akkor veszi fel a maximális értékét, amikor P éppen valamelyik csúccsal szemközt van a körülírt körön. Világos, hogy ekkor a kérdéses szorzat értéke 2. Ha P valamelyik csúccsal egybeesik, akkor $abc = 0$, a továbbiakban ezzel az esettel nem foglalkozunk. Minden más pont a körülírt kör két szomszédos csúcs közötti ívén található. Belátjuk, hogy a szorzat éppen az ívfelező pontnál maximális. Tegyük fel, hogy P az A és B csúcsok közötti íven van. Az világos, hogy c éppen a C-vel szemközti pontnál maximális. Elég tehát ugyanezt belátni ab-ről is.

Megmutatjuk, hogy a PAB háromszög területe egyenesen arányos ab-vel. Ekkor nyilvánvaló, hogy a rögzített AB oldal miatt a hozzá tartozó magasság akkor maximális, ha P az ívfelező pont. Legyen A merőleges vetülete a PB egyenesre T! Ekkor ATP egy derékszögű háromszög, melyben T-nél van a derékszög és az átfogójának hossza a. Ha a kör középpontja O, akkor az OAP és OBP egyenlőszárú háromszögek csúcsszögeinek összege az AOB szög, amelynek a nagysága 120°. Így az APB szög nagysága is 120° (vagy lehet hivatkozni a kerületi szögek tételére).

Ezért APT szög nagysága 60°. Tehát $TP = 0{,}5\,a$. Ekkor a Pitagorasz-tétel értelmében $AT = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a$. Így a PAB háromszög területe: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,ab$ (alapja b, magassága $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a$).

Ezért ab és c is a C-vel szemközti pontra (az AB ív felezőpontjára) maximális, tehát az abc is. (Természetesen ugyanilyen tulajdonságú a maradék két ív felezőpontja is.)

Megjegyzés: Egy ismert feladat szerint $c = a + b$. Így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$abc \leqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot c = \frac{c^3}{4} \leqq 2$$

és $a = b = 1$, $c = 2$ esetén egyenlőség áll fenn.

2. Megegyezik az I. kategória 3. feladatával.

3. Van-e 14 olyan, egymás után következő pozitív egész szám, hogy a számok mindegyike osztható a 2; 3; 5; 7; 11 prímek közül legalább eggyel?

Megoldás. Koncentráljunk először a 2-vel, 3-mal, illetve 5-tel osztható számok lehetséges elhelyezkedésére 14 szomszédos szám között. Nézzük meg, hogy ezek együtt hány számot fedhetnek le. Belátjuk, hogy legfeljebb 11 szám fedhető le velük. 14 db szomszédos pozitív egész közül mindig pontosan **7 db** osztható 2-vel.

A páros számok elhelyezkedésére az alábbi két lehetőség adott:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
 & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2
\end{array}$$

Most nézzük meg, hogy a 3-mal osztható számok hány olyan számot fedhetnek le, melyek nem oszthatók 2-vel, azaz eddig nem lettek lefedve. Ezek a számok biztosan $3 \cdot (2k+1)$ alakúak. Az ilyen alakú számok közül két szomszédosnak a különbsége 6, ezért 14 szomszédos szám között vagy kettő, vagy három szerepel közülük.

Három darab 3-mal osztható szám tehát az alábbi módokon helyezkedhet el:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
2 & 3 & 2 & & 2 & & 2 & 3 & 2 & & 2 & & 2 & 3 \\
3 & 2 & & 2 & & 2 & 3 & 2 & & 2 & & 2 & 3 & 2
\end{array}$$

Mivel 5-tel osztható szám legfeljebb 3 lehet a 14-ből és ezek közül is legalább egy páros, ezért vagy egy, vagy kettő olyan számot tudunk lefedni velük, melyek a 2 többszöröseivel eddig nem lettek lefedve.

Most koncentráljunk a 3-mal, illetve 5-tel osztható számokra. Az előbbiekben azt láttuk, hogy a 3-mal osztható számok legfeljebb három páratlan számot fedhetnek le, míg az 5-tel oszthatók legfeljebb kettőt. Most belátjuk, hogy a 3-mal vagy 5-tel osztható számok együttesen nem fedhetnek le öt páratlan számot. Ehhez legelőször is az kéne, hogy a 3-mal osztható számok három páratlan számot fedjenek le. Ezután a még le nem fedett számok közül kéne két 5-tel oszthatót találni ahhoz, hogy a 3-mal, illetve 5-tel osztható számok együttesen öt páratlan számot lefedhessenek. A szóba jöhető 5-tel osztható számok mind páratlanok, tehát két szomszédos szám különbsége 10. A három darab 3-mal osztható szám elhelyezkedésére előbb vázolt két lehetőség esetén viszont a legkisebb és legnagyobb le nem fedett számok különbsége csak 8, tehát ha a 3-mal osztható számok három páratlan számot lefednek, akkor az 5-tel oszthatók már csak egyetlen, eddig le nem fedett számot fedhetnek le. Tehát valóban, a 3-mal, illetve 5-tel osztható számok együttesen legfeljebb négy darab páratlan számot fedhetnek le. Most ott tartunk, hogy a 2-vel, 3-mal, illetve 5-tel osztható számok együttesen legfeljebb $7+4=11$ számot fedhetnek le. 7-tel osztható legfeljebb 2 db szám lehet, melyek közül egyik páros, tehát ezzel csak egy újabb számot fedhetünk le. 11-gyel osztható szintén csak 2 db lehet, és ezek közül is legfeljebb az egyik páratlan. Ez újabb egy lefedett számot jelenthet. Összességében tehát nem fedhető le több, mint $11+1+1=13$ szám, vagyis mindig lesz olyan szám a 14 szomszédos pozitív egész szám között, mely egyetlen számmal sem osztható a 2; 3; 5; 7 és 11 számok közül.