Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

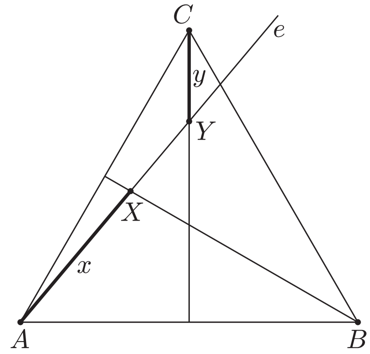
1. Megegyezik az I. kategória 3. feladatával.

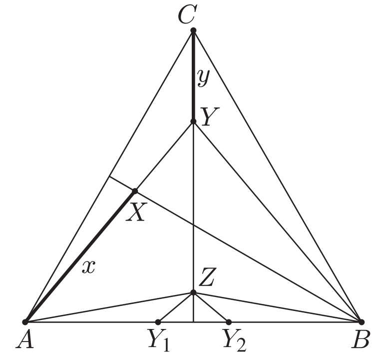
2. Tekintse a legkisebb 20 db pozitív egész számot és sorolja őket tetszőlegesen két 10-elemű csoportba! Képezze az összes olyan 2-tényezős szorzatot, melyek tényezői különböző csoportból valók! Bizonyítsa be, hogy mindig lesz két olyan szorzat, melyek között pontosan 2 a különbség!

Megoldás. Tekintsünk 4 szomszédos egész számot. Legyenek ezek: $x-1$; x; $x+1$; $x+2$. Ekkor a középső kettő szorzata: x^2+x, a két szélső szorzata pedig: x^2+x-2. Elég tehát megmutatnunk, hogy biztosan van négy szomszédos egész szám, melyek közül a középső kettő különböző csoportban van, és ez igaz a két szélsőre is. Rendeljünk hozzá a két csoportba osztott számokhoz egy számsorozat-kódot. Pl. a 2; 3; 1; 5; 1; 1; 4; 1; 2 kód jelentse azt, hogy az első 2 elem az A csoportba tartozik, a következő 3 elem a B csoportba, a következő 1 elem megint az A-ba, majd a következő 5 elem megint a B-be stb. Ha a fenti kódban van két szomszédos 1-es szám és egyik sem a kód szélén van, akkor ez azt jelenti, hogy találtunk négy szomszédos elemet, melyek váltakozva eltérő csoportba tartoznak. Pl. A; B; A; B. (Itt a középső B; A betűkhöz tartoznak 1-es kódok.) Másrészt, ha a kódban van valahol két szomszédos szám, melyek egyike sem 1-es, akkor megint találtunk alkalmas négy számot, hiszen ekkor pl. A; A; B; B mintázatnak kell szerepelnie itt, és ez is megfelelő számunkra. Tegyük fel, hogy létezik olyan csoportba osztás (és hozzá tartozó kód), hogy az iménti két lehetőség közül egyik sem fordul elő a kódban. Nyilvánvaló, hogy ekkor a kód nem állhat csupa 1-es számból. Van tehát benne valahol egy $x \geqq 2$ szám. Az előbbiek szerint e mellett csak 1-es szám állhat a kódban mindkét (vagy esetleg csak az egyik) oldalon. Az 1-es után megint egy 1-nél nagyobb szám kell, hogy szerepeljen, melyet újabb 1-es követ, és így tovább. Ilyen módon az egyik csoport izolált 1-elemű részhalmazokból épül fel. Ezekből 10 db-nak kell lennie, ekkor viszont a másik csoport legalább 9 részhalmazból kéne, hogy álljon, melyek mindegyike legalább 2 elemű. Ez nyilvánvaló ellentmondás.

3. Az ABC egységoldalú szabályos háromszög B, illetve C csúcsához tartozó magasságvonalak m_b, illetve m_c. Legyen e egy olyan egyenes, mely az A csúcson áthalad, metszi a BC oldalszakaszt és az AC oldallal $10°$-os szöget zár be, továbbá legyen e és m_b metszéspontja X, e és m_c metszéspontja Y! Jelölje az AX szakasz hosszát x, míg a CY szakaszét y! Számítsa ki a $2y\left(1+x^2\right)+x\left(2+y^2\right)$ pontos értékét!

Megoldás. A bal oldali ábra mutatja az alakzatok elhelyezkedését a kitűzött feladat szerint. A jobb oldali ábrán behúzott vonalak segítségével igazoljuk a kívánt összefüggést, az ABC háromszög területét kétféleképpen kiszámítva.





Egyrészt tudjuk, hogy egységnyi oldalú szabályos háromszög területe: $T = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Most nézzük a jobb oldali ábrát. Mivel a $CAY\sphericalangle = 10^\circ$, és $YCA\sphericalangle = 30^\circ$, ezért $ZYA\sphericalangle = 40^\circ$. Vegyük fel a Z pontot az m_c-n úgy, hogy $ZAB\sphericalangle = 10^\circ$ legyen. Ekkor $YAZ\sphericalangle = ZYA = \sphericalangle 40^\circ$. Tehát az YAZ háromszög egyenlő szárú. Mivel szimmetria-okokból $AZ = AX = x$, ezért $YZ = AZ = x$ szintén teljesül. Vegyünk fel az AB szakaszon Y_1 és Y_2 pontokat úgy, hogy $Y_1ZA\sphericalangle = BZY_2\sphericalangle = 30^\circ$ legyen!

A ZAY_1 háromszög hasonló CAY-hoz, a megfelelő szögek egyezése miatt. ZAY_1 és ZBY_2 pedig egybevágóak a szimmetria miatt. Az Y_1Y_2Z háromszög hasonló az YAZ háromszöghöz, szintén a szögek egyezése miatt.

$$T_{YCA} = \frac{y}{4} \qquad (\text{alap} = y,\ \text{magasság} = 1/2).$$

$$T_{Y_1ZA} = x^2 \cdot \frac{y}{4} \qquad (\text{a hasonlóság aránya: } x).$$

$$T_{YAZ} = \frac{x}{4} \qquad (\text{alap} = x,\ \text{magasság} = 1/2).$$

$$T_{Y_1Y_2Z} = y^2 \cdot \frac{x}{4} \qquad (\text{a hasonlóság aránya } y\text{, hiszen } YZ = x\text{, míg } Y_1Z = x \cdot CY = x \cdot y).$$

Most már tehát felírhatjuk az ABC háromszög területét egy másik módon is:

$$T = 2 \cdot T_{YCA} + 2 \cdot T_{Y_1ZA} + 2 \cdot T_{YAZ} + T_{Y_1Y_2Z} =$$

$$= 2 \cdot \frac{y}{4} + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{y}{4} + 2 \cdot \frac{x}{4} + y^2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Innen pedig:

$$2y + 2x^2y + 2x + y^2x = 2y\big(1 + x^2\big) + x\big(2 + y^2\big) = \sqrt{3}\,.$$