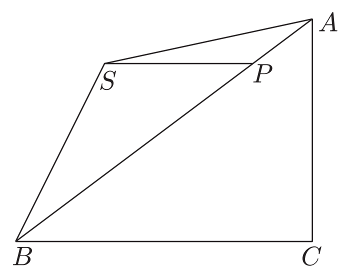
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

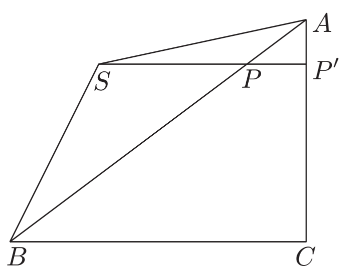
Megoldások és javítási útmutató

1. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszög AC oldala 6 cm, BC oldala 8 cm hosszú. Az SP szakasz párhuzamos BC-vel és fele olyan hosszú.

Mekkora az ABS háromszög területe? Bizonyítsuk be, hogy az ABS háromszög területe nem függ a P pont megválasztásától!



1. megoldás. Húzzunk merőlegest S-ből AC-re. Legyen a merőleges talppontja AC-n P'. 1 pont



Írjuk fel az ABS háromszög területét, mint a PAS és PBS háromszögek területének összege.

$$T_{PAS} = \frac{PS \cdot AP'}{2},$$

$$T_{PBS} = \frac{PS \cdot PC'}{2}.$$

2 pont

$$T_{SAB} = T_{PAS} + T_{PBS} = \frac{PS \cdot AP'}{2} + \frac{PS \cdot PC'}{2} =$$

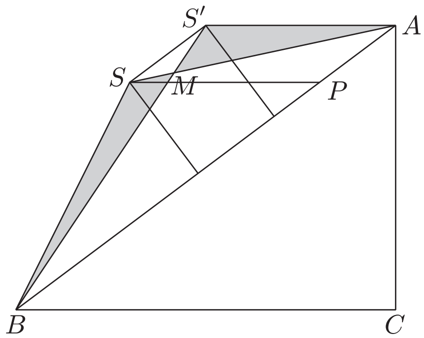
$$= \frac{PS \cdot (AP' + P'C)}{2} = \frac{PS \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

Tehát az ABS háromszög területe 12 cm^2. 2 pont

A fenti számítás P tetszőleges helyzete mellett elvégezhető, nem függ attól, hogy hol veszszük fel AB egyenesén. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás.



Húzzunk párhuzamost A-n keresztül SP-vel, és mérjünk rá SP-t. Legyen az így kapott pont S'. 1 pont

SS' párhuzamos AB-vel, így S és S' azonos távolságra vannak az AB szakasztól. 1 pont

Így az ABS' és ABS háromszögek területe megegyezik, mert azonos az alapjuk és egyenlő hosszú a magasságuk. 1 pont

Tehát P-t tetszőlegesen választva az AB egyenesén, a $BS'A$ háromszöggel azonos területű háromszöget kapunk. 2 pont

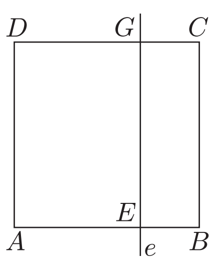
Az ABS' háromszög területét pedig kiszámíthatjuk, mint az AS' alap, és a hozzá tartozó magasság szorzata:

$$T_{BAS'} = \frac{AS' \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet BC oldalával párhuzamos e egyenes az AB oldalt az E, a CD oldalt pedig a G pontban metszi. Az $AEGD$ és az $EBCG$ négyszög kerületének aránya λ. Ha $\frac{AE}{EB} = \mu$, akkor mekkora a $(2-\lambda)\cdot(2+\mu)$ szorzat értéke?

Megoldás.



Az ábrának megfelelően az $EB = x$ jelöléssel $AE = \mu x$, így az $ABCD$ négyzet oldala $x + \mu x = x(1+\mu)$. 1 pont

Az $AEGD$ téglalap kerülete $2\mu x + 2x(1+\mu) = 2x(2\mu+1)$.

Az $EBCG$ téglalap kerülete $2x + 2x(1+\mu) = 2x(\mu+2)$. 1 pont

A feltételek alapján $\frac{2x(2\mu+1)}{2x(\mu+2)} = \frac{2\mu+1}{\mu+2} = \lambda$. 1 pont

Rendezéssel $\lambda\mu + 2\lambda - 2\mu = 1$ adódik. 1 pont

Mivel $(\lambda-2)(\mu+2) = \lambda\mu + 2\lambda - 2\mu - 4$, ezért $(\lambda-2)(\mu+2) + 4 = 1$. 2 pont

Ekkor pedig $(\lambda-2)(\mu+2) = -3$, azaz $(2-\lambda)(2+\mu) = 3$, tehát a szorzat keresett értéke 3. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek $(x \in \mathbb{R})$ egy zérushelye van. Az $f(x)$ függvény mininumhelye $x = c$. Mekkora lehet az ac szorzat értéke?

Megoldás. Mivel az $f(x)$ függvénynek minimuma van, ezért $a > 0$.

Teljes négyzetté alakítással $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ alakú. 1 pont

A minimum helye $x = -\frac{b}{2a}$, ami a feltétel szerint $-\frac{b}{2a} = c$, azaz $b = -2ac$. 2 pont

Az $f(x)$ függvénynek egy zérushelye van, így a diszkrimináns értéke 0, azaz $b^2 - 4ac = 0$. 1 pont

A $b = -2ac$ helyettesítéssel $4a^2c^2 - 4ac = 0$. 1 pont

A $4ac(ac - 1) = 0$ alakról leolvasható, hogy ac lehetséges értéke 0 vagy 1. 1 pont

Mindkét eset meg is valósul.

Ha $ac = 0$, akkor $c = 0$ és $b = 0$, így $f(x) = ax^2$, ha pedig $ac = 1$, akkor $c = \frac{1}{a}$ és $b = -2$, $f(x)$ pedig $f(x) = ax^2 - 2x + \frac{1}{a}$ alakú, ahol $a > 0$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel!

1. megoldás. Egy szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha 3-mal és 8-cal is osztható. 1 pont

Vizsgáljuk a 3-mal való oszthatóságot:

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = 13^n - 1^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 9 =$$

$$= (13 - 1)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 1 + \ldots + 13 \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1}\big) + 3 \cdot 5^{n-1} + 9.$$ 2 pont

Mivel az összeg minden tagja osztható 3-mal, ezért az összeg is. 1 pont

Hasonlóan vizsgáljuk a 8-cal való oszthatóságot is:

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = 13^n - 5^n + 5^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$

$$= (13 - 5)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 5 + \ldots + 13 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}\big) + 5 \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$

$$= (13 - 5)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 5 + \ldots + 13 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}\big) + 8 \cdot 5^{n-1} + 8.$$ 2 pont

Az összeg minden tagja osztható 8-cal, ezért az összeg is, tehát a kifejezés 24-gyel is osztható minden pozitív egész n esetén. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Legyen $a_n = 13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n-re.

Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 13 + 3 + 8 = 24$, ami osztható 24-gyel. 1 pont

Tekintsük a sorozat két egymást követő tagjának különbségét:

$$a_{n+1} - a_n = 13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8 - \left(13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8\right) =$$

$$= 13 \cdot 13^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 8 - 13^n - 3 \cdot 5^{n-1} - 8 = 12 \cdot \left(13^n + 5^{n-1}\right).$$ 3 pont

Tetszőleges páratlan szám minden pozitív egész kitevőjű hatványa páratlan, 1 pont
ezért a zárójelben levő kifejezés értéke két páratlan szám összege, tehát páros. 1 pont

Páros szám 12-szerese osztható 24-gyel, vagyis a sorozat bármely két egymást követő tagjának különbsége osztható 24-gyel. Mivel ez igaz a sorozat első tagjára is, ezért a sorozat minden tagja 24 többszöröse. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Legyen $a_n = 13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n-re, az oszthatóságot bizonyítsuk n-szerinti teljes indukcióval.

Legyen $n = 1$, ekkor $a_1 = 13 + 3 + 8 = 24$, ami osztható 24-gyel. 1 pont

Tegyük fel, hogy az állítás valamely pozitív egész n-re igaz, be kell látnunk, hogy $n + 1$-re is igaz. 1 pont

$$a_{n+1} = 13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8 = 13 \cdot 13^n + 5 \cdot 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$

$$= 13 \cdot \left(13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8\right) - 8 \cdot 3 \cdot 5^{n-1} - 12 \cdot 8 = 13 \cdot a_n - 24 \cdot 5^{n-1} - 24 \cdot 4.$$ 3 pont

Az első tag az indukciós feltevés szerint osztható 24-gyel, 1 pont
ezért az összeg mindhárom tagja osztható 24-gyel, tehát az a_n sorozat minden tagja valóban a 24 többszöröse. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

Megoldás. Először vizsgáljuk meg azt, hogy a 20 dm-es szélesség hogyan hozható ki a kétféle járókőből. Mivel nem lehet darabolni a köveket, páros sok 5-ös kell, hogy páros szélességet kapjunk. Mivel $20 - 2 \cdot 5 = 10$ nem osztható 4-gyel, ezért csak két lehetőség van:

- vagy 4 darab 5×5-ös;
- vagy 5 darab 4×4-es kerülhet egymás mellé.

Tehát a kikövezés úgy fog kinézni, hogy a 20×99-es téglalapot 20×4-es és 20×5-ös téglalapokkal fogjuk lefedni. 2 pont

Most arra fogunk koncentrálni, hogy a 99 dm-es hossz hogyan állhat össze 4 dm-es és 5 dm-es részekből. Meg kell tehát oldanunk a

$$4a + 5b = 99$$

egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán. 1 pont

Átrendezve $4a = 99 - 5b$, tehát $99 - 5b$ 4-gyel osztható, ami pontosan akkor teljesül, ha b $4k + 3$ alakú. Innen már egyszerűen táblázatba foglalhatjuk a lehetőségeket:

a	b
21	3
16	7
11	11
6	15
1	19

2 pont

Végül azt kell meggondolnunk, hogy melyik fajta járókő az olcsóbb. Összesen $20 \cdot 99\ \mathrm{dm}^2$ területet kell lefednünk, ezért azt fogjuk kiszámolni, hogy melyik típusú kő esetén olcsóbb egy dm^2.

Mivel $130/25 < 6 < 100/16$, ezért a nagyobb járókő az olcsóbb, abból kell minél többet felhasználni. 1 pont

A táblázat utolsó sorában a legnagyobb a nagyobb kövek száma. Az $a = 1$ öt darab kisebb járókövet jelent, a $b = 19$ pedig $19 \cdot 4 = 76$ nagyobbat (hiszen 20 dm szélességben kell lerakni a köveket). Tehát a kincstár $5 \cdot 100 + 76 \cdot 130 = 10380$ garasból tudja megoldani a felújítást. 1 pont

Összesen: 7 pont