Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy konferencián magyar, angol, francia, német, olasz és spanyol tudósok vettek részt. Valaki észrevette, hogy mindenkinek pontosan hat ismerőse van jelen, mind a hat nemzetből pontosan egy. (Az ismeretségek kölcsönösek, és senki nem számít a saját maga ismerősének.)

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 12-vel!

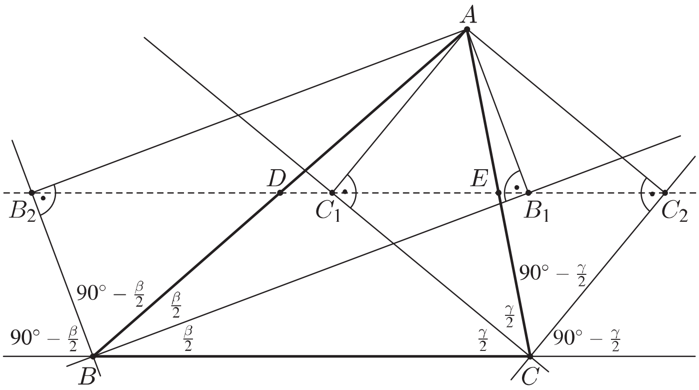
$b)$ Bizonyítsuk be, hogy ha n 12-vel osztható pozitív egész szám, akkor valóban létezhet ilyen konferencia pontosan n résztvevővel!

Megoldás. $a)$ Belátjuk, hogy minden nemzetségbe ugyanannyi résztvevő tartozik. Minden angol résztvevőhöz rendeljük hozzá francia ismerősét. A feltételből világos, hogy mindegyikhez pontosan egyet rendeltünk, így az angolok és a franciák száma megegyezik. Ezt nyilván bármelyik két nemzetségre elmondhatnánk. Másrészt belátjuk, hogy minden nemzetségbe páros sok résztvevő tartozik. Minden magyarhoz rendeljük hozzá magyar ismerősét, így a feltétel alapján párokba rendeztük a magyarokat, tehát a magyar résztvevők páros sokan vannak. Ezt is bármelyik nemzetségre elmondhatnánk. Tehát összességében minden nemzetségből ugyanannyian és páros sokan vannak, amiből az állítás világos.

$b)$ Legyen $n = 12k$, ahol k tetszőleges pozitív egész szám. Vegyünk fel $2k$ darab hatost: $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$. Egy hatos hat különböző országból érkezett emberből áll, minden nemzetségből egy-egy emberből, akik közül mindenki ismer mindenkit. Tegyük fel továbbá, hogy minden $1 \leqq i \leqq k$-ra A_i és B_i között a következő ismeretségek állnak fenn: mindenki ismeri a saját honfitársát. Más ismeretség nincs. Világos, hogy a konstrukció megfelelő.

2. Egy háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó két belső és két külső szögfelezőre merőlegeseket állítunk. Ezek a szögfelezőket a D, E, F és G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy pont egy egyenesre illeszkedik!

Megoldás.



Jelöljük a háromszög A csúcsának a B és C csúcsokhoz tartozó belső és külső szögfelezőkre való merőleges vetületét B_1, B_2, C_1, C_2-vel. Legyen $B_1B_2 \cap AB = D$ és $C_1C_2 \cap AC = E$. Mivel az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért az AB_2BB_1 és AC_1CC_2 négyszögek téglalapok. Mivel a téglalap átlói felezik egymást, ezért D és E az AB, illetve AC oldal felezőpontjai, azaz DE középvonal az ABC háromszögben, és így $DE \parallel BC$.

Másrészt a téglalap félátlói egyenlő hosszúságúak, ezért a BDB_2 háromszög egyenlőszárú. Ezt felhasználva:

$$DB_2B\sphericalangle = B_2BD\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad BDB_2\sphericalangle = 180° - 2\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \beta.$$

Mivel $BDB_2\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \beta$, ezért $B_2D \parallel BC$.

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $C_2E \parallel BC$.

Mivel a B_2D és C_2E szakaszok részei a B_2B_1 és C_2C_1 szakaszoknak, $DE \parallel BC$, ezért a B_1, B_2, C_1, C_2 pontok valóban egy egyenesre esnek, és ez az egyenes az ABC háromszög BC oldallal párhuzamos középvonalára illeszkedik. Ezzel az állítást igazoltuk.

3. Tudjuk, hogy $a + \dfrac{1}{a} = p$, ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$A = a^4 + a^3 + a^2 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$

egész szám! Mennyi a p értéke, ha A-nak négy pozitív osztója van?

Megoldás. Alkalmazzuk a két tag összegének négyzetére, illetve köbére vonatkozó azonosságot az alábbi módon!

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \quad \text{és} \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Ebből
$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2 \quad \text{és} \quad a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$
Ezt felhasználva kapjuk, hogy
$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2.$$
Így
$$a^2+\frac{1}{a^2}=p^2-2, \quad a^3+\frac{1}{a^3}=p^3-3p \quad \text{és} \quad a^4+\frac{1}{a^4}=\left(p^2-2\right)^2-2.$$
Tehát:
$$A=a^4+a^3+a^2+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}=\left(p^2-2\right)^2-2+p^3-3p+p^2-2,$$
ami egész szám.

Alakítsuk át a kapott kifejezést az alábbi módon!
$$A=\left(p^2-2\right)^2-2+p^3-3p+p^2-2=p^4-4p^2+4-2+p^3-3p+p^2-2=$$
$$=p^4+p^3-3p^2-3p=p(p^2-3)(p+1).$$
Mivel $4=4\cdot 1=2\cdot 2$, ezért A-nak csak úgy lehet négy pozitív osztója, ha egy prímszám harmadik hatványa, vagy két prímszám szorzata. Az első nem állhat fenn, hisz a p és $p+1$ relatív prímek, a második pedig csak úgy állhat fenn, ha p és $p+1$ prím, a p^2-3 pedig 1. Ebből jön, hogy $p=2$ és $A=6$ és $a=1$.