

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Feladatok

1. Adott egy k kör és rajta kívül egy P pont. A P -ből a k -hoz húzott érintők érintési pontjai Q és R . Q -ból húzzunk a PR -rel párhuzamost, és metssze ez a k kört A -ban! Metssze továbbá az AP szakasz a k kört B -ben és QB az RP -t C -ben! Igaz-e, hogy $RC = CP$?

2. Legyen f a racionális számok halmazán értelmezett, valós értékű függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges x, y racionális számokra teljesül az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

egyenlőség. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú f függvényt!

3. Rögzített $k \geq 2$ egész szám esetén azt mondjuk, hogy az n pozitív egész szám k -felbomló, ha létezik olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$n = p + a^k.$$

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, mely egyetlen $2 \leq k \leq 2012$ egész számra sem k -felbomló!