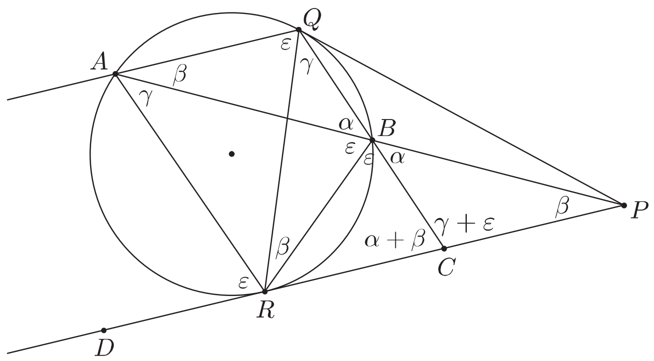
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott egy k kör és rajta kívül egy P pont. A P-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontjai Q és R. Q-ból húzzunk a PR-rel párhuzamost, és metssze ez a k kört A-ban! Metssze továbbá az AP szakasz a k kört B-ben és QB az RP-t C-ben! Igaz-e, hogy $RC = CP$?

Megoldás.



A következőkben felhasználjuk az azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlőségéről, valamint az érintőszárú kerületi szögekről szóló ismereteket. Legyen $ARQ\sphericalangle = \alpha$, ekkor $ABQ\sphericalangle = \alpha$. Legyen $BAQ\sphericalangle = \beta$, ekkor $BRQ\sphericalangle = \beta$. Legyen $RAB\sphericalangle = \gamma$, ekkor $RQB\sphericalangle = \gamma$. Legyen $ABR\sphericalangle = \varepsilon$, ekkor $AQR\sphericalangle = \varepsilon$.

Legyen D egy tetszőleges pont a PR szakasz R-en túli meghosszabbításán. Ekkor $ARD\sphericalangle = \varepsilon$, hiszen az AR húrhoz tartozó érintőszárú kerületi szög. Az $ARBQ$ húrnégyszögben a szemközti szögek összege $180°$, ezért $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 180°$. Innen adódik, hogy $BRC\sphericalangle = \gamma$, hiszen az R csúcsnál ez egészíti ki $180°$-ra a többi három szöget. $AQR\sphericalangle$ és $QRC\sphericalangle$ váltószögek, ezért $QRC\sphericalangle = AQR\sphericalangle = \varepsilon$. A QRC háromszögben két szög már ismert: $CQR\sphericalangle = \gamma$ és $QRC\sphericalangle = \varepsilon$. Innen $RCQ\sphericalangle = \alpha + \beta$ adódik. A BRC háromszögben $BRC\sphericalangle = \gamma$ és $RCB\sphericalangle = \alpha + \beta$, tehát $CBR\sphericalangle = \varepsilon$. $RCB\sphericalangle = \alpha + \beta$ miatt $BCP\sphericalangle = \gamma + \varepsilon$. $PBC\sphericalangle = \alpha$, hiszen $ABQ\sphericalangle = \alpha$-val csúcsszöget alkot. A BCP háromszöget vizsgálva közvetlenül adódik, hogy $CPB\sphericalangle = \beta$, hisz a másik két szöget már ismerjük. $PQC\sphericalangle = \beta$, hiszen a BQ-hoz tartozó érintőszárú kerületi szög. A PQC háromszögben már két szög ismert, tehát $CPQ\sphericalangle = \alpha$. A megfelelő szögek egyezősége miatt $RCB\triangle$ hasonló $QCR\triangle$-höz, továbbá $CPB\triangle$ hasonló $CQP\triangle$-höz.

A hasonlóságok miatt: $\frac{BC}{RC} = \frac{RC}{QC}$, valamint $\frac{BC}{CP} = \frac{CP}{QC}$. Az első összefüggésből $RC \cdot RC = BC \cdot QC$, míg a másodikból $CP \cdot CP = BC \cdot QC$ adódik. A két egyenlőség összevetéséből $RC \cdot RC = CP \cdot CP$, innen pedig $RC = CP$ adódik, hiszen pozitív hosszakról van szó.

2. Legyen f a racionális számok halmazán értelmezett, valós értékű függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges x, y racionális számokra teljesül az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

egyenlőség. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú f függvényt!

Megoldás. Ha $y = x$, akkor $f(2x) = 2f(x) + x^2$, azaz

$$f(2x) - \frac{(2x)^2}{2} = 2\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right).$$

Tehát ennek $f(x) = \frac{x^2}{2}$ megoldása. Visszahelyettesítéssel látható, hogy erre teljesül az $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ egyenlőség is.

Legyen: $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Ekkor $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Ha $x = y = 0$, akkor azt kapjuk, hogy $g(0) = 0$. Ha $y = x$, akkor $g(2x) = 2g(x)$ és ezután pl. teljes indukcióval azt kapjuk, hogy $g(nx) = ng(x)$ bármely n természetes számra. Ha $y = -x$, akkor felhasználva, hogy $g(0) = 0$, $g(-x) = -g(x)$ és így bármely k egész számra $g(kx) = kg(x)$. Legyenek most p és q egész számok ($q \neq 0$)! Ekkor

$$g(x) = g\left(q \cdot \frac{x}{q}\right) = qg\left(\frac{x}{q}\right), \quad \text{azaz} \quad g\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}g(x)$$

és így

$$g\left(\frac{p}{q} \cdot x\right) = g\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) = pg\left(\frac{x}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q}g(x).$$

Tehát bármely r és x racionális számra: $g(rx) = rg(x)$. Végül r helyett x-et és x helyett 1-et írva azt kapjuk, hogy $g(x) = g(1) \cdot x$, tehát csak

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)x$$

lehet és egyszerűen látható, hogy erre teljesül is az eredeti egyenlet.

3. Rögzített $k \geqq 2$ egész szám esetén azt mondjuk, hogy az n pozitív egész szám k-felbomló, ha létezik olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$n = p + a^k.$$

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, mely egyetlen $2 \leqq k \leqq 2012$ egész számra sem k-felbomló!

Megoldás. Legyen $N = 2012!$ és jelöljük a $2 \leqq k \leqq 2012$ egyenlőtlenségnek eleget tevő k pozitív egész számok halmazát K-val!

Bebizonyítjuk, hogy végtelen sok olyan 1-nél nagyobb b egész szám van, melyre ha $k \in K$, akkor b^N nem k-felbomló. Tegyük fel, hogy valamely $b >$1-re b^N k-felbomló valamely rögzített k-ra ($k \in K$). Ekkor van olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$b^N = p + a^k, \quad \text{azaz} \quad p = b^N - a^k = \left(b^{\frac{N}{k}}\right)^k - a^k.$$

Tehát ismert azonosság alapján:

$$p = \left(b^{N/k} - a\right)\left(b^{(k-1)N/k} + b^{(k-2)N/k}a + \ldots + b^{N/k}a^{k-2} + a^{k-1}\right).$$

Itt a második tényező > 1, mert $b > 1$. Ezért $b^{N/k} - a = 1$, azaz $a = b^{N/k} - 1$. Ezt az előzőbe beírva azt kapjuk, hogy

$$p = Q_k(b),$$

ahol $Q_k(x) = x^{(k-1)N/k} + x^{(k-2)N/k}\left(x^{N/k} - 1\right) + \ldots + x^{N/k}\left(x^{N/k} - 1\right)^{k-2} + \left(x^{N/k} - 1\right)^{k-1}$ egy egész együtthatós polinom, és $Q_k(x) > 1$, ha $x > 1$. Tehát végtelen sok olyan b-t kell keresnünk, hogy ha akkor $Q_k(b)$ ne legyen prímszám.

Legyen minden $k \in K$ esetén a p_k prímszám a $Q_k(2)$ egy osztója (ilyen van, mert $Q_k(2) > 1$) és vezessük be az $m = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{2012}$ jelölést! Ezután minden $k \in K$ esetén válasszuk úgy a t_k pozitív egész számot, hogy ha $x > t_k$, akkor teljesüljön a $Q_k(mx + 2) >$ $> p_k$ egyenlőtlenség (ilyen t_k létezik, hiszen $Q_k(x)$ egy olyan nem konstans polinom, amelyben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív). Végül jelöljük a $\max(t_2, \ldots, t_{2012})$ számot T-vel!

Így, ha $t > T$ egész szám, akkor bármely $k \in K$ esetén $Q_k(mt + 2)$ osztható lesz p_k-val, hiszen a p_k és az m definíciójából következik, hogy $Q_k(mt + 2)$ és $Q_k(2)$ p_k-val osztva ugyanazt a maradékot adják és $Q_k(2)$ osztható p_k-val, másrészt t_k megválasztása miatt p_k-nál nagyobb.

Így $Q_k(mt + 2)$ nem prímszám.

Nyilvánvaló, hogy végtelen sok $t > T$ egész szám van. Tehát ezekre $b = mt + 2$ esetén $Q_k(b)$ nem prímszám, ha $k \in K$.