

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Feladatok

1. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012 és a 2013 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

2. Adott egy kör az AB átmérőjével. Legyen C a körvonal A -tól és B -től különböző pontja! Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a D és E pontot úgy, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$ teljesüljön. Legyen k_1 a BC befogót érintő D középpontú, míg k_2 az AC befogót érintő E középpontú kör! Legyen T az ABC háromszög beírt körének, míg T_1 a k_1 és T_2 a k_2 körnek a területe! Hogyan vegyük fel a C pontot, hogy a $\frac{T}{T_1 + T_2}$ tört értéke maximális legyen? Mekkora ez a maximális érték?

3. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?