Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot(2x-2)\cdot(2x-3)\cdot(2x-4)$$ (6 pont)

Megoldás. $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(2x-3)\cdot 2\cdot(x-2)$,
amiből adódik, hogy $x_1=1$, illetve $x_2=2$ megoldások. (2 pont)

Ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$, akkor

$$(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(2x-3)\cdot 2,$$

azaz

$$x^2-7x+12=16x^2-32x+12,$$

ezt az egyenletet rendezve:

$$0=15x^2-25x,\quad \text{azaz}\quad 0=x(3x-5),$$

amiből $x_3=0$ és az $x_4=\dfrac{5}{3}$ gyököket kapjuk, (3 pont)
amik szintén megoldások a megadott alaphalmazon. (1 pont)

Megjegyzés: Ha elvégzi a beszorzásokat és rendez, akkor a

$$0=15x^4-70x^3+105x^2-50x$$

egyenletet kapja, amiből $0=x\big(3x^3-14x^2+21x-10\big)$, tehát az egyik gyök $x_1=0$. (1 pont)

A $0=3x^3-14x^2+21x-10$ egyenlet megoldása:

1) racionális gyökteszt alkalmazásával vagy próbálgatással könnyen adódik például az $x_2=1$ megoldás, (2 pont)
2) majd a másodfokú egyenlet megoldásával vagy további gyökteszttel a többi gyök ügyes csoportosítással például:

$$0=3x^3-3x^2-11x^2+11x+10x-10=3x^2(x-1)-11x(x-1)+10(x-1)=$$
$$=(x-1)\cdot\big(3x^2-11x+10\big),$$

és innen befejezhető a megoldás. (3 pont)

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és a szám nem osztható 6-tal? (6 pont)

Megoldás. Mivel csak egyetlen páros prímszám van (a 2), ezért, ha egy szám mindkét szomszédja prímszám, akkor biztosan páratlan prímszámokról van szó, így maga a szám biztosan osztható 2-vel. (1 pont)

Három egymást követő szám között mindig van 3-mal osztható. (2 pont)

1. eset: Az egyik prímszám osztható 3-mal, azaz az egyik prímszám a 3. Ekkor a három szám csak a 3, 4 és 5 lehet. (Hiszen az 1 nem prím!) (1 pont)

2. eset: A középső szám osztható 3-mal, ekkor azonban – mivel páros – biztosan osztható 6-tal is.

Tehát egyetlen olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és ő maga nem osztható 6-tal: a 4. (2 pont)

3. Egy 3 házaspárból álló 6 fős társaság elhatározza, hogy úgy ünneplik meg a karácsonyt, hogy mindegyikük megajándékozza a társaság egy másik tagját. Ehhez mindenki felírja a nevét egy cédulára, a cédulákat beleteszik egy kalapba majd mindenki húz egy cédulát a kalapból. A kihúzónak azt a személyt kell megajándékoznia, akinek a neve a kihúzott cédulán szerepel. A lehetséges esetek hányad részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki? (8 pont)

Megoldás. Jelöljük a személyeket 1-től 6-ig, a házaspárok: $1-2$, $3-4$ és $5-6$.

Ekkor az összes lehetséges húzások száma: $6! = 720$. (1 pont)

Ezek közül a kedvező húzások számának meghatározásához soroljuk fel az összes lehetőséget!

Az 1-es személy nem húzhatja önmagát, illetve a 2-es személyt (házastársa), de húzhatja a 3-as személyt. Az összes lehetséges húzás, amelyben a 3-as személyt húzza az alábbi táblázatból olvasható ki (a táblázat egy sora egy érvényes húzásnak felel meg):

Ki húz?	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	3	4	5	6	1	2
2.	3	4	5	6	2	1
3.	3	4	6	5	1	2
4.	3	4	6	5	2	1
5.	3	5	1	6	2	4
6.	3	5	1	6	4	2
7.	3	5	2	6	1	4
8.	3	5	2	6	4	1
9.	3	5	6	1	2	4
10.	3	5	6	1	4	2
11.	3	5	6	2	1	4
12.	3	5	6	2	4	1

Ki húz?	1	2	3	4	5	6
13.	3	6	1	5	2	4
14.	3	6	1	5	4	2
15.	3	6	2	5	1	4
16.	3	6	2	5	4	1
17.	3	6	5	1	2	4
18.	3	6	5	1	4	2
19.	3	6	5	2	1	4
20.	3	6	5	2	4	1

(5 pont)

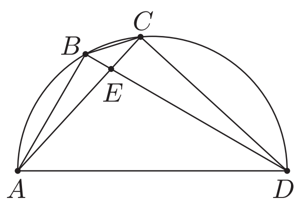
Pont ugyanennyi lehetőség adódik akkor is, ha az 1-es személy a 4-es, 5-ös vagy 6-os személyt húzza, azaz a kedvező húzások száma: $4 \cdot 20 = 80$. (1 pont)

Így a lehetséges esetek $\frac{1}{9}$ részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki? (1 pont)

A 20 „alapesetre” adott 5 pont szétbontható. Aki 13-mat felír 1 pontot, aki 14-et vagy 15-öt felír 2 pontot, aki 16-ot vagy 17-et felír 3 pontot, aki 18-at vagy 19-et felír 4 pontot kaphat.

4. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját. Határozza meg az $AE \cdot AC + DB \cdot DE$ kifejezés pontos értékét! (10 pont)

Megoldás.



Thalész tétele miatt ABD derékszögű háromszög, így a Pitagorasz-tételt felírva

$$AD^2 = AB^2 + (EB + DE)^2,$$

ahonnan

$$AD^2 = AB^2 + EB^2 + DE^2 + 2 \cdot EB \cdot DE.$$ (2 pont)

Mivel AEB is derékszögű háromszög, ezért $AB^2 + EB^2 = AE^2$, ezenkívül

$$EB = DB - DE,$$

így

$$AD^2 = AE^2 - DE^2 + 2 \cdot DB \cdot DE.$$ (3 pont)

Hasonlóan kapjuk az ACD és ECD derékszögű háromszögekből, hogy

$$AD^2 = DE^2 - AE^2 + 2 \cdot AE \cdot AC.$$ (3 pont)

Összegezve az előbbi két egyenlőséget adódik $AD^2 = AE \cdot AC + DB \cdot DE$, tehát

$$AE \cdot AC + DB \cdot DE = 1. \qquad \text{(2 pont)}$$

5. Melyik a legnagyobb n természetes szám, amelyre $5^{(2^{2013})} - 1$ osztható 2^n-nel? (10 pont)

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a $5^{(2^{2013})} - 1$ számot!

Használjuk a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot!

$$5^{(2^k)} - 1 = 5^{(2^{k-1} \cdot 2)} - 1 = \left(5^{(2^{k-1})}\right)^2 - 1 = \left(5^{(2^{k-1})} - 1\right)\left(5^{(2^{k-1})} + 1\right). \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek ismételt alkalmazásával:

$$5^{(2^{2013})} - 1 = \left(5^{(2^{2012})} + 1\right)\left(5^{(2^{2011})} + 1\right)\left(5^{(2^{2010})} + 1\right) \ldots \left(5^2 + 1\right)(5+1)(5-1). \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel az 5 négyes maradéka 1, ezért bármely hatványának a négyes maradéka 1. Ezért az $5^m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$ négyes maradéka 2, azaz néggyel nem osztható páros szám. Így az első 2013 darab tényező mindegyike osztható 2-vel, de 4-gyel nem. Az utolsó tényező pedig $4 = 2^2$, így n lehetséges legnagyobb értéke 2015. (4 pont)