Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2 és 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

1. megoldás. Tekintsük azokat a tízjegyű természetes számokat, amelyek az 1, 2 és 3 számjegyeken kívül más számjegyet nem tartalmaznak.

Ezek száma: 3^{10} =59049. 1 pont

Jelölje ezek közül S_i azok számát, amelyekben az i legfeljebb egyszer szerepel ($i = 1, 2, 3$) és $S_{i;j}$ azok számát, amelyekben az i és a j is legfeljebb egyszer szerepel ($i; j = 1, 2, 3$ és $i \neq j$).

A számjegyek hasonló szerepe miatt: $S_1 = S_2 = S_3$ és $S_{1;2} = S_{1;3} = S_{2;3}$. 3 pont

$S_1 = 10 \cdot 2^9 + 2^{10} = 6144$, mert ekkor az 1-es egyszer vagy egyszer sem fordul elő a számban. 2 pont

$S_{1;2} = 1 + 10 + 10 + 90 = 111$, mert ekkor sem az 1-es, sem a 2-es nem fordul elő vagy az 1-es egyszer és a 2-es nem fordul elő vagy a 2-es egyszer és az 1-es nem fordul elő vagy az 1-es és a 2-es is egyszer fordul elő a számban. 3 pont

Így a logikai szita-formula alapján a kérdezett számok száma:

$$59\,049 - 3 \cdot 6144 + 3 \cdot 111 = 40\,950.$$ 1 pont

2. megoldás(vázlat). Az előforduló 1, 2 és 3 számjegyek gyakorisága szerint négy eset lehet: $6-2-2$, $5-3-2$, $4-4-2$ és $4-3-3$. 1 pont

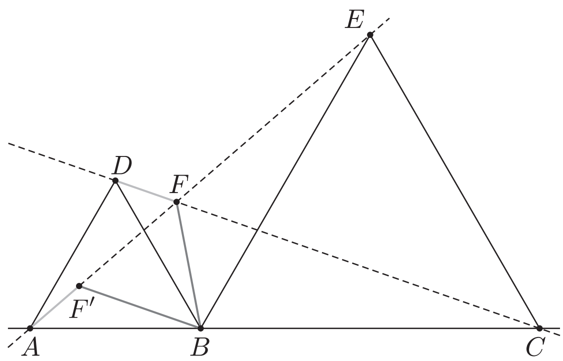
Ha az egyik számjegy hatszor, a másik kettő kétszer fordul elő, akkor a hatszor előforduló számjegy három-féle lehet, és ha ez pl. az 1-es, akkor azon tízjegyű számok száma, amelyekben 6 db 1-es, 2 db 2-es és 2-db 3-as szerepel pl. az ismétléses permutáció képlete szerint: $\frac{10!}{6!\,2!\,2!} = 1260$. Így $3 \cdot 1260 = 3780$ számot kapunk. 2 pont

A többi esetben rendre 15 120, 9450 és 12 600 számot kapunk. $2-2-2$ pont

Tehát a kérdezett számok száma: $3780 + 15\,120 + 9450 + 12\,600 = 40\,950$. 1 pont

2. Legyen A, B és C ebben a sorrendben egy egyenes három pontja. Szerkesszük meg az egyenes azonos oldalára az ABD és BCE szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ha az AE egyenest tükrözzük DC egyenesre, akkor a tükörkép átmegy a B ponton!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Mivel az ABD és BCE háromszög szabályos, ezért a D pontot, illetve a C pontot egy B középpontú 60°-os forgatás viszi az A, illetve E pontba. 2 pont

Tehát ezzel a forgatással a DC egyenes átvihető az AE egyenesbe. Így a két egyenes 60°-os szöget zár be egymással. 2 pont

Emiatt elég azt belátni, hogy BF, ahol F a két egyenes metszéspontja, felezi a CFA szöget. 1 pont

Mivel F pont rajta van a DC egyenesen, így a B középpontú 60°-os forgatással keletkező képe, ami F', rajta van AE-n. 2 pont

Így az $F'BF$ háromszög szabályos, amiből következik, hogy $BFF'\sphericalangle = 60°$. 2 pont

Tehát BF felezi a CFA szöget, így a BF egyenes lesz az AE egyenes CD egyenesre vonatkozó tükörképe. 1 pont

3. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az

$$x^4 + 4 = py^4$$

egyenlet megoldható az egész számok körében.

Megoldás. $p = 2$ esetén py^4 páros szám, így szükségképpen x is az. Ekkor az egyenlet baloldala 4-gyel osztható, ezért y-nak is párosnak kell lennie. Ha x és y is páros szám, akkor $16 \mid x^4$ és $16 \mid y^4$, ami azt jelentené, hogy az egyenlet baloldala 16-tal osztva 4 maradékot adna, míg a jobboldal 16-tal osztható lenne, vagyis az egyenlőség nem állhatna fenn. 1 pont

Ha p páratlan prímszám, akkor x és y különböző paritása esetén az egyenlet két oldalán is különböző paritású szám állna, vagyis ez az eset nem valósulhat meg. Ha x és y is páros lenne, akkor a korábbiak szerint a 16-tal való osztási maradékok nem egyeznének meg az egyenlet két oldalán szereplő kifejezéseknél. Így a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy p, x és y egyaránt páratlan szám legyen. 1 pont

Írjuk fel az egyenletet az alábbi formában:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 + 2\right)^2 - (2x)^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) = py^4.$$ 2 pont

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy az egyenlőség bal oldalán szereplő szorzótényezők legnagyobb pozitív közös osztója 1.

Ha $d \mid x^2 + 2x + 2$ és $d \mid x^2 - 2x + 2$ ($d \in \mathbb{N}$), akkor $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 - 2x + 2\right) = 4x$.

Mivel a vizsgált tényezők páratlan x esetén páratlan számok, ezért d is az, ami azt jelenti, hogy $d \mid x$. Ezt kihasználva $d \mid x^2 + 2x$ és $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 + 2x\right) = 2$. Mivel d páratlan szám, ezért d valóban csak 1 lehet. 2 pont

Felhasználva, hogy $x^2 - 2x + 2$ és $x^2 + 2x + 2$ legnagyobb közös osztója 1, két esetet vizsgálhatunk:

1. eset: Léteznek olyan a, b természetes számok, melyekre $(a; b) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = a^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = pb^4.$$

Ekkor

$$(x - 1)^2 + 1 = \left(a^2\right)^2 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + 1 = pb^4.$$

Mivel az $\left(a^2\right)^2$ és $(x - 1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $a^4 = 1$ és $(x - 1)^2 = 0$, amiből $a = 1$ és $x = 1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $b = 1$ és $p = 5$. 2 pont

2. eset: Léteznek olyan c, d természetes számok, melyekre $(c; d) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = pc^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = d^4.$$

Ekkor

$$(x - 1)^2 + 1 = pc^4 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + 1 = \left(d^2\right)^2.$$

Mivel a $\left(d^2\right)^2$ és $(x + 1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $d^4 = 1$ és $(x + 1)^2 = 0$, amiből $d = 1$ és $x = -1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $c = 1$ és $p = 5$. 1 pont

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az egyenlet a feltételeknek megfelelően csak $p = 5$ esetén oldható meg. Ekkor az egyenlet x, y-ra adódó megoldásai az $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ és $(-1; -1)$ számpárok. 1 pont