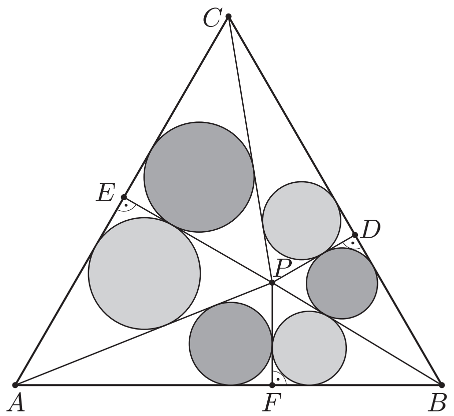
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató



1. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P-ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai.

Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCE, illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk.

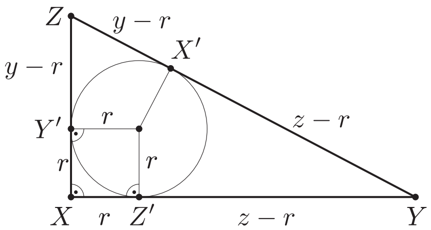
Megoldás. Használjuk fel az alábbi lemmát:

Az XYZ derékszögű háromszögben, ha a $ZXY\sphericalangle = 90°$, akkor a beírt kör sugara $r = \frac{1}{2}(y + z - x)$, ahol x, y, z jelöli a háromszög megfelelő oldalainak hosszát.

A lemma igazolása:

Ha X', Y', Z' jelöli az érintési pontokat, akkor felhasználva, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak

$$YZ = YX' + X'Z = YZ' + ZY' = XY - XZ' + ZX - XY'.$$



Tehát

$$x = z - r + y - r,$$

amiből

$$r = \frac{1}{2}(y + z - x).$$ 2 pont

A lemma alapján a feladat állításának igazolásához elegendő belátni, hogy

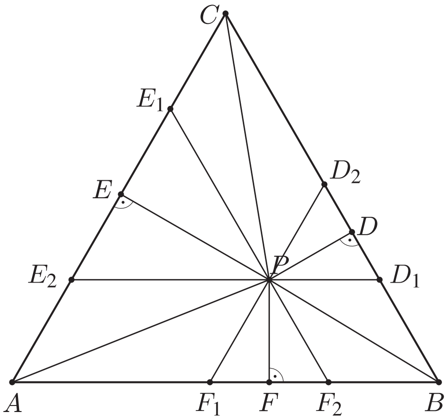
$$\frac{1}{2}\big[(AF+FP-PA)+(BD+DP-PB)+(CE+EP-PC)\big]=$$

$$=\frac{1}{2}\big[(BF+FP-PB)+(CD+DP-PC)+(AE+EP-PA)\big],$$

ami ekvivalens az $AF+BD+CE=AE+BF+CD$ egyenlőséggel. 2 pont

Húzzunk párhuzamosokat a P ponton keresztül az ABC háromszög oldalaival. A BC, CA, AB oldalakon keletkező metszéspontokat jelöljük az ábra szerint D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2-vel. A keletkező D_1D_2P, E_1E_2P, F_1F_2P háromszögek szabályosak lesznek, mivel szögeik egyállásúak az ABC háromszög szögeivel. 2 pont

Az AF_1D_2C, BD_1E_2A, CE_1F_2B szimmetrikus trapézok szárainak egyenlőségét felhasználva:



(1) $AF_1=CD_2$,

(2) $BD_1=AE_2$,

(3) $CE_1=BF_2$. 2 pont

Mivel a szabályos háromszög magassága felezi a hozzá tartozó oldalt, ezért

(4) $F_1F=F_2F$,

(5) $D_1D=D_2D$,

(6) $E_1E=E_2E$. 1 pont

A 6 számozott összefüggés megfelelő oldalait összeadva:

$$AF_1+F_1F+BD_1+D_1D+CE_1+E_1E=AE_2+E_2E+BF_2+F_2F+CD_2+D_2D,$$
$$AF+BD+CE=AE+BF+CD$$ 1 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

2. Mely $n\geqq 3$ egész számok esetén létezik n darab páronként különböző pozitív egész szám úgy, hogy mindegyik osztója a többi összegének?

Megoldás. Legyenek ezek a számok $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Az oszthatósági feltétel pontosan akkor teljesül, ha mindegyikük osztója $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$-nek, vagyis ha minden $1\leqq i\leqq n$ esetén létezik olyan k_i pozitív egész szám, hogy $S=k_ia_i$, azaz $a_i=S/k_i$. 2 pont

Mivel S éppen az a_i számok összege, ezért $\sum 1/k_i=1$, $1\leqq i\leqq n$. Ezért először olyan k_i páronként különböző pozitív egész számokat keresünk, melyek reciprokösszege 1. 1 pont

Belátjuk, hogy ilyenek minden $n\geqq 3$ esetén léteznek. Ha $n=3$, akkor $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=6$ megfelelő választás. 1 pont

Ha pedig valamely $n \geqq 3$-ra már sikerült megadni n darab páronként különböző pozitív egész számot, melyek reciprokösszege 1, akkor közülük a legnagyobbat (ezt jelöljük y-nal) elhagyva, és $y+1$-et, valamint $y(y+1)$-et bevéve $n+1$ páronként különböző pozitív egész számot kapunk, amelyek reciprokösszege szintén 1, hiszen $1/y = 1/(y+1) + 1/\bigl[y(y+1)\bigr]$. Innen indukcióval következik az állítás. 3 pont

Tegyük fel tehát, hogy találtunk már olyan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ páronként különböző pozitív egész számokat, melyek reciprokösszege 1. Legyen K a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ számok legkisebb közös többszöröse. Ekkor $a_i = K/k_i$ számok ($1 \leqq i \leqq K$) olyan páronként különböző pozitív egészek, amelyek összege K, és minden i-re teljesül, hogy $a_i \mid K$. Beláttuk, hogy minden $n \geqq 3$-ra léteznek ilyen számok. 3 pont

Megjegyzés: A k_i számokra egy másik lehetséges konstrukció: $k_1 = 2$, $k_2 = 2^2$, $\ldots$, $k_{n-2} = 2^{n-2}$, $k_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$, $k_n = 3 \cdot 2^{n-2}$. Ezzel a választással $K = 3 \cdot 2^{n-2}$, és így az $a_1 = 3 \cdot 2^{n-3}$, $a_2 = 3 \cdot 2^{n-4}$, $\ldots$, $a_{n-2} = 3$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$ megoldás adódik.

(Aki bármilyen módon minden $n \geqq 3$-ra megad egy helyes konstrukciót, az 3 pontot kap, a fennmaradó 7 pont a konstrukció helyességének igazolásáért jár.)

3. Az $1, 2, \ldots, 2015$ számok közül legfeljebb hányat lehet úgy kiválasztani, hogy a kiválasztottak közül semelyik két különbözőnek az összege nincs a kiválasztottak között? Adjuk meg az összes olyan kiválasztást, amellyel a lehető legtöbb számot kiválaszthatjuk.

Megoldás. Először bebizonyítjuk, hogy 1009 darab számot nem lehet kiválasztani. Legyen ugyanis a legnagyobb kiválasztott szám x. Ha x páratlan, akkor az x-nél kisebb számokat párokba rendezzük: $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, $\ldots$, $(x/2 - 1/2, x/2 + 1/2)$. Világos, hogy minden párból legfeljebb egy szám választható ki, hiszen az egy párban levők különböznek, és az összegük x. Mivel összesen $x/2$-nél kevesebb pár van, az x-szel együtt a kiválasztható számok száma kisebb, mint $x/2 + 1 < 1009$ (hiszen x legfeljebb 2015). Ha pedig x páros, akkor legyenek a párok $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, $\ldots$, $(x/2-1, x/2+1)$. Ismét egy párból legfeljebb egy szám választható, a párok száma legfeljebb $x/2 - 1$, az $x/2$-vel és az x-szel együtt is a kiválasztható számok száma legfeljebb $x/2 + 1 < 1009$ (hiszen x legfeljebb 2014).

(*Pontozás:* 1 pont annak bizonyítására, hogy 1009 számot nem lehet kiválasztani.)

Második lépésként példákkal megmutatjuk, hogy 1008 szám viszont kiválasztható. Négy példánk:

1. az összes páratlan szám: 1, 3, 5, $\ldots$, 2015: ez jó, hiszen két páratlan szám összege páros;

2. a lehető legnagyobbak: 1008, 1009, 1010, $\ldots$, 2015: ez jó, hiszen a két legkisebb öszszege is nagyobb, mint a legnagyobb;

3. az előző módosítása (az 1008-at 1007-re cseréljük): 1007, 1009, 1010, 1011, $\ldots$, 2015: ez jó, hiszen a két legkisebb összege is nagyobb, mint a legnagyobb;

4. a 2. eltoltja: 1007, 1008, 1009, $\ldots$, 2014: ez jó, mert a két legkisebb összege is nagyobb, mint a legnagyobb.

(*Pontozás:* 1 pont, ha valamelyik példát megadja, és megindokolja, az miért jó.)

Ezzel a feladat első részét megoldottuk: 1008 szám kiválasztható a megadott feltétellel, több nem.

A feladat második részét úgy oldjuk meg, hogy bebizonyítjuk, pontosan csak a négy megadott konstrukció létezik 1008 szám kiválasztására.

(*Pontozás:* 1 pont, ha megsejti, hogy csak ez a négy a jó.)

Tegyük fel, hogy kiválasztottunk 1008 számot a feltételnek megfelelően. Először belátjuk, hogy a legnagyobb szám legalább 2014. Legyen ugyanis indirekten a legnagyobb szám $x < 2014$. Ha x páratlan, akkor az $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, $\ldots$, $(x/2 - 1/2, x/2 + 1/2)$ párok mindegyikéből legfeljebb egy lehet a kiválasztottak között. Az x-szel együtt ez kevesebb, mint $x/2 + 1$, ami kevesebb, mint 1008, ha $x < 2014$. Ha pedig x páros, akkor az $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, $\ldots$, $(x/2 - 1, x/2 + 1)$ párok mindegyikéből legfeljebb egy lehet a kiválasztottak között. Az $x/2$-vel és az x-szel együtt ez legfeljebb $x/2 + 1$, ami kevesebb, mint 1008, ha $x < 2014$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, beláttuk tehát, hogy a legnagyobb kiválasztott szám legalább 2014.

(*Pontozás:* 1 pont annak bizonyítására, hogy a legnagyobb kiválasztott szám legalább 2014.)

Ha a legnagyobb kiválasztott szám a 2014, akkor a nála kisebb számokat rendezzük párokba: $(1, 2013)$, $(2, 2012)$, $\ldots$, $(1006, 1008)$, és kimaradt az 1007. Mivel egy párból csak egy szám választható (egy párban az összeg 2014), és 1006 darab párunk van, a kiválasztott számok között van az 1007, valamint minden párból pontosan egy szám. Most belátjuk, hogy minden párból a nagyobb számot kellett kiválasztani. Legyen ugyanis indirekten $y < 1007$ egy kiválasztott szám. Ekkor $y + 1007$ nincs kiválasztva (hiszen két különböző kiválasztott szám, y és 1007 összege). Ekkor annak párja, $2014 - (1007 + y) = 1007 - y$ ki van választva. Ez azonban ellentmondás, hiszen y és $1007 - y$ összege 1007, és ez mindhárom kiválasztott szám, továbbá y és $1007 - y$ különböznek, hiszen y egész. Az ellentmondás tehát azt adja, hogy minden párból a nagyobb számot választottuk, így a kiválasztott számok éppen a 4. konstrukciót adják.

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha a legnagyobb szám a 2014, akkor egyedül a 4. konstrukció jó.)

Mostantól feltesszük, hogy a legnagyobb kiválasztott szám a 2015. A nála kisebb számokat osszuk párokba: $(1, 2014)$, $(2, 2013)$, $\ldots$, $(1007, 1008)$. Világos, hogy minden párból pontosan egy számot választottunk ki.

Először nézzük azt az esetet, amikor kiválasztottuk az 1-et. Ebben az esetben a 2014-et nem választottuk ki. Belátjuk, hogy a 2-t nem választhattuk ki. Ha ugyanis kiválasztottuk volna, akkor a 2-nél nagyobb számokat osszuk hármasokba: $(3, 4, 5)$, $(6, 7, 8)$, $\ldots$, $(2013, 2014, 2015)$. Világos, hogy semelyik hármasból nem választhattunk ki egynél több számot: ha már kettőt választanánk, akkor azok különbsége 1 vagy 2 lenne, ahonnan átrendezve kapnánk két különböző kiválasztott számot, melyek összege szintén kiválasztott. A hármasok száma $2013/3 = 671$, még az 1-gyel és a 2-vel is jóval 1008 alatt maradunk. Tehát a 2-t nem választhattuk ki. Ekkor a párját, a 2013-at kiválasztottuk. Ekkor a 2012-t nem $(1 + 2012 = 2013)$. Ekkor annak párját, a 3-at igen. Ekkor a 4-et nem $(1 + 3 = 4)$. Ekkor annak párját, a 2011-et igen. És így tovább, végül minden páratlan számot kiválasztottunk, ez éppen az 1. konstrukciót adja. (Ez teljesen rendben van, de ha valaki formálisan akarja az indukciót, akkor: ha egy 1-nél nagyobb, 2013-nál kisebb z páratlan számot kiválasztottunk, akkor a nála eggyel nagyobb párosat $(z + 1)$ nem, ekkor annak párját $(2015 - z - 1)$

igen, az annál eggyel kisebbet $(2015 - z - 2)$ nem, ekkor annak párját $(z + 2)$ igen. És az indukció a 3-ról indítható.)

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha az 1-et kiválasztottuk, akkor az egyedüli helyes konstrukció az 1. konstrukció.)

A továbbiakban tehát feltehető, hogy a 2015 mellett a 2014-et is kiválasztottuk, az 1-et pedig nem. Tekintsük a következő sorozatot: 2013, 2, 2012, 3, 2011, 4, 2010, 5, 2009, 6, …, 1010, 1005, 1009, 1006, 1008, 1007. Ez a sorozat 2012 tagú, és 1006 kiválasztott szám van benne. Világos, hogy nem lehet két szomszédos tagja kiválasztva, hiszen azok összege 2015 vagy 2014. Osszuk a sorozatot a következő módon párokba: $(2013, 2)$, $(2012, 3)$, $(2011, 4)$, $(2010, 5)$, $(2009, 6)$, $\ldots$, $(1010, 1005)$, $(1009, 1006)$, $(1008, 1007)$. Minden párból pontosan egy tag van kiválasztva. Ha egy párból az első tagot választottuk, akkor az őt megelőző párból nem lehetett a második tagot (az összegük 2014 lenne), tehát a megelőző párból is az első tagot választottuk. Ugyanígy, ha egy párból a második tagot választottuk, akkor a következő párból nem választhattuk az első tagot, tehát a másodikat kellett. Összességében: (balról jobbra haladva a párokon) valameddig az első tagot választottuk, utána pedig a második tagot. Az első párból biztosan az első tagot választottuk, hiszen ha nem, akkor mindenhonnan a második tagot kellett, de ez nem lehet, például $2 + 3 = 5$ miatt. Ekkor azonban már az utolsó két párból sem választhattuk a második tagot, hiszen $2013 = 1006 + 1007$. Tehát kétféleképpen választhattunk: vagy mindenhonnan az első tagot (2. konstrukció), vagy az utolsó kivételével mindenhonnan az első tagot, az utolsóból a második tagot (3. konstrukció).

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha a 2014 és a 2015 is kiválasztásra került, akkor csak a 2. és a 3. konstrukció létezik.)

Pontozás összefoglalva: A feladat második része lényegesen nehezebb, ezért a pontozás 2 (1. rész) + 8 (2. rész). Az első részben 1–1 pontot ér a kérdezett mennyiségre adott felső becslés (akármilyen helyes bizonyítással) és az alsó becslés (akármelyik helyes konstrukcióval). A feladat 2. részében 1 pont jár a végeredmény megsejtésére (önmagában a négy konstrukcióra nem, csak ha valahol kiderül, hogy ezeket véli az összes lehetségesnek). Jár 1 pont arra, ha a belátja, hogy az első 2013 szám között nincs 1008 megfelelő. Innen a feladat három különböző szálra vezet, mindegyiknek az elvarrásáért 2–2 pont jár. Természetesen mindenhol jár a pont egyenértékű részeredményekre.