Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

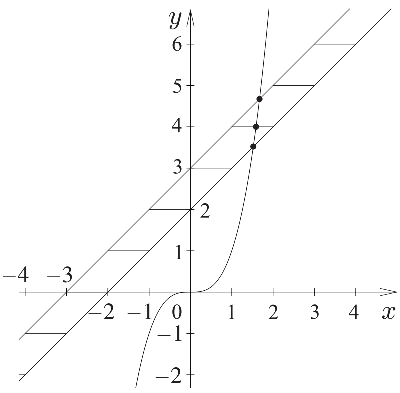
Megoldások és javítási útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^3 - [x] = 3.$$

($[x]$: az x valós szám egész része. Az x valós szám egész részén azt a legnagyobb egészet értjük, amely nem nagyobb x-nél. Ez magával x-szel egyenlő, ha x egész.)

Megoldás. Grafikus megoldás:



Az egyenlet átrendezése: $x^3 = [x] + 3$ alakba.

Közös koordinátarendszerben való ábrázolása a jobb és a baloldali kifejezésnek, mint függvénynek: $f(x) = x^3$ és $g(x) = [x] + 3$. — 2 pont

A metszéspont második koordinátájának megállapítása a grafikonról: $y = 4$. — 1 pont

Az x értékének meghatározása: $x^3 = 4$, $x = \sqrt[3]{4}$. — 2 pont

Annak magyarázata, hogy nincs több metszéspont, így ez az egyetlen megoldás.

Például egy lehetséges indoklás:

Illesszünk egyeneseket a $g(x) = [x] + 3$ függvényhez: $y = x + 3$ és $y = x + 2$. Vizsgáljuk, hogy hány metszéspontja van a két egyenesnek az $f(x) = x^3$ függvénnyel.

$x^3 = x + 2$, $x^3 = x + 3$. Átrendezve a következő alakba hozhatóak:

$$x \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 2, \quad x \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 3.$$

A baloldali szorzat $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ helyeken előjelet vált, illetve ezekben a pontokban a baloldal értéke nulla, tehát itt nincs metszéspont. Vizsgáljuk a lehetséges megoldásokat a következő intervallumokon:

$x < -1$	A baloldali szorzat negatív, nincs metszéspont.	
$-1 < x < 0$	A baloldali szorzat értéke pozitív és kisebb, mint 2, nincs metszéspont.	
$0 < x < 1$	A szorzat értéke negatív, nincs metszéspont.	
$1 < x \leqq 2$	Biztosan van egy metszéspont, mivel $x = 1$ helyen $x^3 < x + 2$, és $x = 2$ helyen $x^3 > x + 3$.	
$2 < x$	A szorzat értéke nagyobb, mint 6, nincs metszéspont.	2 pont

Az egyenlet átrendezhető a következő alakba is: $x^3 - 3 = [x]$, ekkor $f(x) = x^3 - 3$ és $g(x) = [x]$, $y = 1$.

A részpontok az előbb leírtaknak megfelelően adhatóak.

Ha próbálgatással megtalálja a helyes megoldást, akkor maximum 3 pont adható.

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet A csúcsán átmenő egyenes a DC oldalt E, a BC oldal meghosszabbítását F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

Megoldás. Felhasználjuk, hogy $ADE_\triangle \sim ABF_\triangle$, mert mindkettő derékszögű, továbbá $DAE\sphericalangle$ és $AFB\sphericalangle$ váltószögek. 2 pont

Legyen a négyzet oldalának hossza $AB = 1$ és vezessük be a $DE = x$ jelölést. Ekkor $EC = 1 - x$. A fenti hasonlóságból $\dfrac{BF}{1} = \dfrac{1}{x}$, vagyis $BF = \dfrac{1}{x}$ következik. 2 pont

A Pitagorasz-tételt az ADE és ABF háromszögekre alkalmazva a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1.$$ 1 pont

A második törtet bővíthetjük x^2-tel, és így kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1,$$

ami nyilván igaz. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. A 49 szám két számjegye közé beírjuk a 48 számot, majd a belső 4-es és 8-as közé újra beírjuk a 48-at, majd ezt néhányszor megismételjük ($44\ldots48\ldots89$). Igaz-e, hogy így mindig négyzetszámot kapunk?

Megoldás. Ha $n-1$-szer elvégezzük a 48 középre írását, akkor egy $2n$-jegyű számot kapunk, ami a következő alakban is írható:

$$4\cdot 11\ldots1\cdot 10^n+8\cdot 11\ldots1+1,$$

ahol $11\ldots1$ egy csupa 1-esekből álló n-jegyű szám. 1 pont

Legyen most $x=11\ldots1=\frac{1}{9}\cdot 99\ldots9=\frac{1}{9}\cdot\big(10^n-1\big)$, ahol x n-jegyű szám. 2 pont

Ekkor $10^n=9x+1$. 2 pont

Így

$$44\ldots488\ldots89=4x\cdot(9x+1)+8x+1=36x^2+12x+1=(6x+1)^2.$$

Tehát igaz, hogy mindig négyzetszámot kapunk. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglalap élei?

Megoldás. Legyenek a téglatest egy csúcsból kiinduló élei a, b és c. A feladat szövege szerint $abc+ab+ac+bc+a+b+c=2014$. 1 pont

Az egyenlet bal oldala a következőképp alakítható át:

$$abc+ac+bc+c+ab+a+b=c(ab+a+b+1)+ab+a+b=$$

$$=c(ab+a+b+1)+(ab+a+b+1)-1=(ab+a+b+1)(c+1)-1=$$

$$=(a+1)(b+1)(c+1)-1.$$ 2 pont

Innen $(a+1)(b+1)(c+1)-1=2014$, tehát $(a+1)(b+1)(c+1)=2015=5\cdot13\cdot31$. 1 pont

A bal oldalon minden tényező 1-nél nagyobb egész szám, 1 pont
ezért egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha ezek valamilyen sorrendben megegyeznek a jobb oldali 5, 13 és 31 számokkal. 1 pont

A téglatest élei tehát 4, 12 és 30 egység hosszúak. 1 pont

Összesen: 7 pont