Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
Kezdők I–II. kategória II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geqq x^2 + y^2 + 1?$$ (6 pont)

2. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja $AB = 3$ cm hosszú. A BC átmérőjű kör átmegy az átlók metszéspontján és az AB alap B-hez legközelebbi negyedelőpontján. Mekkora a trapéz területe? (6 pont)

3. Jelölje $(a; b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Mennyi az alábbi 2015-tagú összeg értéke:

$$(1; 2015) + (2; 2015) + (3; 2015) + \ldots + (2014; 2015) + (2015; 2015)?$$ (8 pont)

4. Egy különböző pozitív egész számokból álló háromszög alakú számtáblázatot „érdekesnek” nevezünk, ha bármely nem a felső sorban elhelyezkedő elemére igaz, hogy az előállítható a közvetlenül felette elhelyezkedő két szám hányadosaként. Pl. az alábbi 3-szintes táblázat „érdekes”:

7		42		14
	6		3	
		2		

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely előfordulhat egy 4-szintes „érdekes” számtáblázat legnagyobb elemeként. (10 pont)

5. Legfeljebb mekkora lehet az $|a| + |b| + |c|$ kifejezés értéke, ha minden $-1 \leqq x \leqq 1$ esetén $\left|ax^2 + bx + c\right| \leqq 100$? (10 pont)