Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
Kezdők I–II. kategória II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geqq x^2 + y^2 + 1? \qquad (6 \text{ pont})$$

Megoldás. A tagokat egy oldalra rendezve és 2-vel megszorozva az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$2\big(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy\big) \leqq 0. \qquad (1 \text{ pont})$$

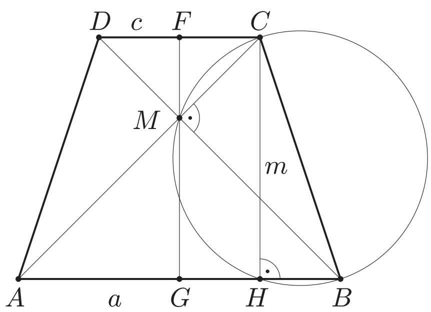
Ebből a baloldalt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 0. \qquad (3 \text{ pont})$$

A baloldal mindhárom tagja nem negatív, ezért mindhárom értéke csak 0 lehet, tehát: $x = y$, $x = 1$ és $y = 1$. Így az egyenlőtlenség csak az $x = 1$ és $y = 1$ számokra teljesül. (2 pont)

2. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja $AB = 3$ cm hosszú. A BC átmérőjű kör átmegy az átlók metszéspontján és az AB alap B-hez legközelebbi negyedelőpontján. Mekkora a trapéz területe? (6 pont)

Megoldás.



Legyen az átlók metszéspontja M, az AB oldal B-hez közelebbi negyedelőpontja H! Készítsünk ábrát! (1 pont)

Mivel a BC szakasz Thalész köre átmegy az M és a H ponton, ezért a $CMB\sphericalangle = CHB\sphericalangle = 90°$. (1 pont)

Így CH a szimmetrikus trapéz magassága.

Ebből következően $HB = \dfrac{a - c}{2}$, azaz $\dfrac{a}{4} = \dfrac{a - c}{2}$,

így $c = \dfrac{3}{2}$cm. (1 pont)

Mivel a trapéz egyenlő szárú, ezért a CDM és az ABM háromszög egyenlő szárú és az előzőek alapján derékszögű is. (1 pont)

Emiatt $FM = \frac{c}{2} = \frac{3}{4}$ cm és $GM = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$ cm, ahol F a CD oldal, G az AB oldal felezőpontja. (1 pont)

Így $CH = FG = FM + MG = \frac{9}{4}$ cm. Tehát a trapéz területe $T = \frac{a+c}{2}m = \frac{81}{16}$ cm^2. (1 pont)

3. Jelölje $(a; b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Mennyi az alábbi 2015-tagú összeg értéke:

$$(1; 2015) + (2; 2015) + (3; 2015) + \ldots + (2014; 2015) + (2015; 2015)?$$ (8 pont)

Megoldás. Mivel $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, azt kell meghatároznunk, hogy hány olyan 2015-nél nem nagyobb x pozitív egész szám van, amelyre $(x; 2015)$ értéke 1; 5; 13; 31; $5 \cdot 13$; $5 \cdot 31$; $13 \cdot 31$ vagy 2015. (1 pont)

Az egyes oszthatósági feltételeket teljesítő x-ek száma:

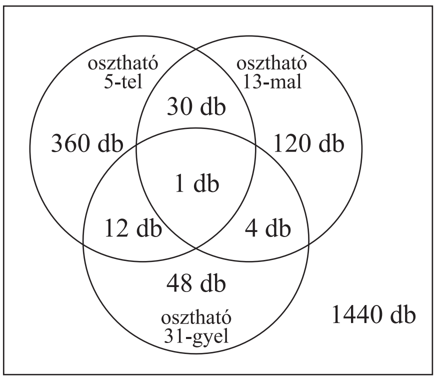
$5 \mid (x; 2015)$ 403 db, $13 \mid (x; 2015)$ 155 db; $31 \mid (x; 2015)$ 65 db, (1 pont)

$5 \cdot 13 \mid (x; 2015)$ 31 db, $5 \cdot 31 \mid (x; 2015)$ 13 db, $13 \cdot 31 \mid (x; 2015)$ 5 db, (1 pont)

$5 \cdot 13 \cdot 31 \mid (x; 2015)$ 1 db. (1 pont)

A meghatározott elemszámokat a halmazábrába beírva megállapíthatjuk, hogy
csak az $(x; 2015) = 5$ feltételt összesen $403 - 1 - (31 - 1) - (13 - 1) = 360$ db,
csak az $(x; 2015) = 13$ feltételt összesen $155 - 1 - (31 - 1) - (5 - 1) = 120$ db, végül
kizárólag az $(x; 2015) = 31$ egyenlőséget összesen $65 - 1 - (13 - 1) - (5 - 1) = 48$ db szám teljesíti.

Így a 2015-höz relatív prímek száma: 1440 db (ez utóbbi adat meghatározható az Euler-féle φ-függvénnyel is).



(3 pont)

A korábbi eredményeinket felhasználva a keresett összeg értéke:

$$1440 \cdot 1 + 360 \cdot 5 + 120 \cdot 13 + 48 \cdot 31 + 30 \cdot (5 \cdot 13) + 12 \cdot (5 \cdot 31) + 4 \cdot (13 \cdot 31) + 1 \cdot 2015$$
$$= 13\,725.$$ (1 pont)

4. Egy különböző pozitív egész számokból álló háromszög alakú számtáblázatot „érdekesnek” nevezünk, ha bármely nem a felső sorban elhelyezkedő elemére igaz, hogy az előállítható a közvetlenül felette elhelyezkedő két szám hányadosaként. Pl. az alábbi 3-szintes táblázat „érdekes”:

7		42		14
	6		3	
		2		

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely előfordulhat egy 4-szintes „érdekes” számtáblázat legnagyobb elemeként. (10 pont)

Megoldás. A 4-szintes „érdekes” számtáblázat nem tartalmazhatja az 1-es számot, mert ekkor az elemek között biztosan lenne legalább két egyenlő. (1 pont)

Jelöljük az alsó sorban helyet foglaló számot a_1-gyel ($a_1 \in \mathbb{N}^+$, $a_1 \geqq 2$).

Ekkor alulról a 2. sorban helyet foglaló pozitív egész számok az a_2 és a_1a_2, ahol $a_2 \neq a_1$. (1 pont)

Alulról a 3. sorban az a_1a_2 szám felett közvetlenül (tetszőleges sorrendben) az a_3 és $a_1a_2a_3$ pozitív egész számok állnak, ahol $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$. (1 pont)

Végül a felső sorban közvetlenül az $a_1a_2a_3$ szám felett (tetszőleges sorrendben) az a_4 és $a_1a_2a_3a_4$ számok állnak, ahol $a_4 \neq a_1$, $a_4 \neq a_2$, $a_4 \neq a_3$. Ez viszont azt jelenti, hogy a felső sorban található legnagyobb szám legalább akkora, mint $a_1a_2a_3a_4$. (1 pont)

Mivel az $a_1a_2a_3a_4$ szorzat négy különböző pozitív egészből áll, melyek mindegyike legalább 2, ezért $a_1a_2a_3a_4 \geqq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. (1 pont)

Ezzel a legnagyobb elemmel készíthető is 4-szintes „érdekes” táblázat, például az alábbi: (4 pont)

40		5		120		30
	8		24		4	
		3		6		
			2			

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő szám a 120. (1 pont)

5. Legfeljebb mekkora lehet az $|a|+|b|+|c|$ kifejezés értéke, ha minden $-1 \leqq x \leqq 1$ esetén $\left|ax^2+bx+c\right| \leqq 100$? (10 pont)

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk azt az esetet, amikor $a \geqq 0$. ($a<0$ esetén a másodfokú kifejezést (-1)-gyel beszorozva továbbra is teljesülnek a feladat feltételei és az együtthatók abszolútértékeinek összege is változatlan marad.) (1 pont)

Másrészt $b<0$ esetén az értelmezési tartomány 0-ra vonatkozó szimmetriája miatt x helyére $(-x)$-et helyettesítve nyilván teljesül az $\left|ax^2-bx+c\right| \leqq 100$ feltétel, és az együtthatók abszolútértékeinek összege most is ugyanannyi marad. Így elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $b \geqq 0$. (1 pont)

Tekintsük ezután az $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ x \in [-1;1])$ függvényt. Mivel $f(0)=c$ és $f(1)=a+b+c$, ezért a megadott feltétel alapján

$$|c| \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad |a+b+c| \leqq 100,$$

$$-100 \leqq c \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad -100 \leqq a+b+c \leqq 100. \qquad \text{(2 pont)}$$

$c \geqq 0$ esetén:

$$|a|+|b|+|c|=a+b+c \leqq 100. \qquad \text{(1 pont)}$$

$c<0$ esetén pedig:

$$|a|+|b|+|c|=a+b-c=(a+b+c)-2c \leqq 100+200=300. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ez utóbbi felső korlát elérhető például az $f(x)=200x^2-100$ $\ x \in [-1;1]$ függvény esetén, ahol a függvény grafikonja olyan parabola, melynek csúcspontja a $(0;-100)$ pont, áthalad a $(-1;100)$, $(1;100)$ pontokon és $R_f=[-100;100]$. (2 pont)

Tehát a keresett kifejezés maximális értéke 300. (1 pont)