Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

(1) $$x^3 - 9\big(y^2 - 3y + 3\big) = 0,$$

(2) $$y^3 - 9\big(z^2 - 3z + 3\big) = 0,$$

(3) $$z^3 - 9\big(x^2 - 3x + 3\big) = 0.$$

2. Az ABC háromszög AD, BE és CF súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy ha az AES, BDS és CDS háromszögek beírt köreinek sugara azonos nagyságú, akkor az ABC háromszög szabályos!

3. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból úgy, hogy semelyik két különbözőnek a szorzata ne legyen négyzetszám?

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 - 9\big(y^2 - 3y + 3\big) = 0, \tag{1}$$

$$y^3 - 9\big(z^2 - 3z + 3\big) = 0, \tag{2}$$

$$z^3 - 9\big(x^2 - 3x + 3\big) = 0. \tag{3}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszert az alábbi alakban:

$$(y-3)^3 = y^3 - x^3,$$
$$(z-3)^3 = z^3 - y^3,$$
$$(x-3)^3 = x^3 - z^3.$$

Az egyenleteket összeadva:

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0. \tag{4}$$

A kapott egyenlet baloldalán szereplő kifejezések valamelyikének nemnegatívnak kell lennie, ezért az egyenlet szimmetriája miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \geqq 3$.

Ekkor a (3)-as egyenlet átrendezésével

$$z^3 - 27 = 9x(x-3).$$

Ebből az x-re tett feltétel alapján $z^3 - 27 \geqq 0$, azaz $z \geqq 3$.

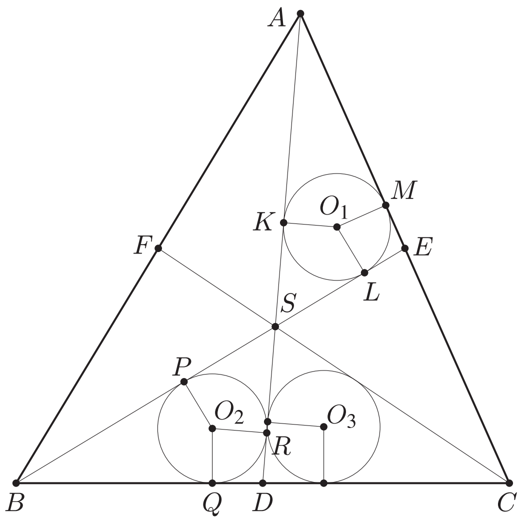
Hasonlóképpen adódik a (2)-es egyenletből, hogy $y \geqq 3$.

Mivel 3 nemnegatív szám összege pontosan akkor 0, ha minden tag értéke 0, ezért a (4)-es egyenlet figyelembevételével az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = y = z = 3$.

A kapott értékeket ellenőrizve azok teljesítik a feladat feltételeit.

2. Az ABC háromszög AD, BE és CF súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy ha az AES, BDS és CDS háromszögek beírt köreinek sugara azonos nagyságú, akkor az ABC háromszög szabályos.

Megoldás. A feladatban szereplő körök sugarát, középpontjait és érintési pontjait jelöljük az ábra szerint.



A BDS és CDS háromszögek területe megegyezik, mivel az S-ből induló magasságuk közös és az S-sel szemközti oldaluk egyenlő hosszú.

A BDS háromszög felosztható az O_2BD, O_2DS és O_2SB, a CDS háromszög pedig az O_3DC, O_3CS és O_3SD háromszögekre.

Az O_2BD háromszög területe megegyezik az O_3DC háromszög területével, mivel az egyik oldaluk és a hozzá tartozó magasságuk egyenlő. Hasonlóképpen az O_2DS és az O_3DS háromszögek területe is azonos. Emiatt az O_2SB háromszög és az O_3CS háromszög területe is megegyezik.

Mivel ezen két háromszögnek van két egyenlő hosszúságú magassága, ezért a hozzátartozó egy-egy-oldaluk is megegyezik, azaz $BS = CS$.

Tudjuk, hogy $BD = DC$, tehát $BDS\triangle \cong CDS\triangle$, mivel oldalaik páronként egyenlők.

Az egybevágóság alapján $BDS\sphericalangle = CDS\sphericalangle$ és $BDS\sphericalangle + CDS\sphericalangle = 180°$ alapján $BDS\sphericalangle = CDS\sphericalangle = 90°$.

Mivel az AD súlyvonal egyben magasság is az ABC háromszögben, ezért az ABC háromszög egyenlőszárú és $AB = AC$.

Mivel az O_1 és O_2 az $ASE\sphericalangle$ és a $BSD\sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkednek el és $ASE\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, ezért $O_2SR\sphericalangle = O_1SL\sphericalangle$. Továbbá $O_1L = O_2R$ és $O_1LS\sphericalangle = O_2RS\sphericalangle = 90°$ alapján $O_1SL\triangle \cong O_2SR\triangle$ és $SL = SR$.

Az ASE és BSD háromszögek 3-3 egybevágó háromszögpárra bonthatók fel ($O_1SL\triangle \cong O_1SK\triangle$, $O_1EL\triangle \cong O_1EM\triangle$, $O_1AM\triangle \cong O_1AK\triangle$, illetve $O_2SR\triangle \cong O_2SP\triangle$, $O_2BP\triangle \cong O_2BQ\triangle$, $O_2DQ\triangle \cong O_2DR\triangle$).

Felhasználva, hogy az ABC háromszöget súlyvonalai 6 egyenlő területű részre bontják:

$$t(ASE\triangle) = t(BSD\triangle), \qquad \text{azaz}$$

$$2\left(\frac{SL \cdot r}{2} + \frac{AM \cdot r}{2} + \frac{ME \cdot r}{2}\right) = 2\left(\frac{SP \cdot r}{2} + \frac{BQ \cdot r}{2} + \frac{QD \cdot r}{2}\right).$$

Mivel $SL = SP$,

$$AM + ME = BQ + QD,$$
$$AE = BD,$$
$$\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC,$$
$$AC = BC.$$

Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszög szabályos.

3. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból úgy, hogy semelyik két különbözőnek a szorzata ne legyen négyzetszám?

Megoldás. Egy pozitív egész számról azt mondjuk, hogy négyzetmentes, ha nincs 1-nél nagyobb négyzetszám osztója, másképpen szólva: a prímtényezős felbontásában minden prímszám 1 kitevővel szerepel. Jelöljük $M(n)$-nel az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazban levő négyzetmentes számok számát. Belátjuk, hogy legfeljebb $M(n)$ szám választható ki az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból úgy, hogy semelyik kettő szorzata nem négyzetszám, és hogy ennyi kiválasztható.

Egyrészt ennyi kiválasztható: válasszuk ki az összes négyzetmentes számot. Ha veszünk két különbözőt, akkor van olyan p prímszám, ami pontosan az egyiknek a prímtényezős felbontásában szerepel (és abban az első hatványon). Ekkor a szorzatukban is az első hatványon szerepel, vagyis a szorzatuk nem négyzetszám.

Másrészt több nem választható ki. Ehhez szükségünk lesz az alábbi segédtételre: minden k pozitív egész szám felírható $k = a^2 b$ alakban, ahol a, b pozitív egész számok, és b négyzetmentes. Ennek bizonyítása a következő. Legyen a^2 a k szám legnagyobb négyzetszám osztója, és legyen $b = \dfrac{k}{a^2}$. Nyilván b is egész szám, állítjuk, hogy négyzetmentes. Legyen c^2 a b egy négyzetszám osztója, ahol c pozitív egész. Be kell látnunk, hogy $c = 1$. Nyilván $k = (ac)^2 \dfrac{b}{c^2}$, és mivel b/c^2 egész, ezért $(ac)^2$ a k egy négyzetszám osztója. Mivel a^2-et úgy választottuk, hogy k legnagyobb osztója legyen, nyilván $c = 1$. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Most térjünk vissza a feladathoz. Tegyük fel, hogy $M(n)$-nél több számot választottunk ki az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból. Minden kiválasztott számot írjunk fel *négyzetszám · négyzetmentes* alakban, ami a segédtétel értelmében megtehető. A négyzetmentes részek az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból kerülnek ki. Mivel ebben a halmazban $M(n)$ darab négyzetmentes szám van, a kiválasztott számok pedig $M(n)$-nél többen vannak, a skatulya-elv értelmében van két olyan, amelyeknek a négyzetmentes része megegyezik, legyenek ezek $a_1^2 b$ és $a_2^2 b$. Ekkor ezek szorzata $(a_1 a_2 b)^2$, ami négyzetszám.

Most $n = 100$-ra specializálunk, $M(100) = 61$, azaz ennyi a kiválasztható számok maximális száma.