Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol a, b és c különböző számjegyeket jelölnek?

Megoldás. A 45-tel való oszthatósághoz a számnak oszthatónak kell lennie 5-tel. Mivel a nem lehet 0, a szám csak 5-re végződhet, azaz $a = 5$. 1 pont

A számnak oszthatónak kell lennie 9-cel, így a számjegyek összege, azaz $10 + 2b + c$ is osztható 9-cel. Mivel b és c különböző számjegyek, így $2b + c$ lehetséges maximális értéke 26. Így $10 + 2b + c$ lehetséges értékei: 18, 27 és 36. 1 pont

Ha $2b + c = 8$, akkor a lehetséges értékek:

b	4	3	2	1	0
c	0	2	4	6	8

(1 pont, de csak ha az összes lehetőség megvan.) 1 pont

Ha $2b + c = 17$, akkor a lehetőségek:

b	8	7	6	**5 nem lehet** a **miatt**	4
c	1	3	**5 nem lehet** a **miatt**	7	9

(1 pont az összes lehetőség megtalálásáért és 1 pont a $6; 5$ és $5; 7$ pár kizárásáért.) 2 pont

Ha $2b + c = 26$, akkor csak a $b = 9$, $c = 8$ lehetőség lesz jó. 1 pont

Összesen tehát 9 a feltételeknek megfelelő szám van. 1 pont

Az összes eset indoklás nélküli felsorolásáért maximum 2 pont adható.

Összesen: 7 pont

2. Az $y \geqq 0$ félsíknak hány olyan rácspontja van, amelyeknek a koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőséget?

$$x^2 + 3y = 40.$$

(Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

Megoldás. A hozzárendelési szabályt átalakítva:

$$x^2 = 40 - 3y,$$

$$x = \pm\sqrt{40 - 3y}\,.$$ 1 pont

A gyökjel alatti kifejezésre:

$$40 - 3y \geqq 0,$$

$$\frac{40}{3} \geqq y.$$ 1 pont

Mivel y csak egész szám lehet, így: $0 \leqq y \leqq 13$, vagyis $0 \leqq 40 - 3y \leqq 40$. 1 pont

Ugyanakkor $40 - 3y$ értéke négyzetszám (0; 1; 4; 9; 16; 25; 36) lehet. 1 pont

A felsorolt esetek közül ez a következőknél teljesül (a 0 és 36 esetében y nem egész):

$$\begin{aligned}
40 - 3y &= 1, &\quad \text{ekkor} \quad x &= \pm 1 \quad \text{és} \quad y = 13,\\
40 - 3y &= 4, &\quad \text{ekkor} \quad x &= \pm 2 \quad \text{és} \quad y = 12,\\
40 - 3y &= 16, &\quad \text{ekkor} \quad x &= \pm 4 \quad \text{és} \quad y = 8,\\
40 - 3y &= 25, &\quad \text{ekkor} \quad x &= \pm 5 \quad \text{és} \quad y = 5.
\end{aligned}$$

A négy jó eset felismerése. 1 pont

Annak felismerése, hogy mindegyik esetben x-re két megoldás adódik. 1 pont

Tehát a grafikon 8 rácsponton halad át:

$$(1; 13), \quad (-1; 13), \quad (2; 12), \quad (-2; 12), \quad (4; 8), \quad (-4; 8), \quad (5; 5), \quad (-5; 5).$$

A rácspontok számának megadása. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Megoldás. Mivel a és b is megoldása az egyenletnek, ezért helyettesítsük be az egyenletbe a-t:

$$a^2 + a^2 + b = 0.$$

Ebből $b = -2a^2$. b-t behelyettesítve kapjuk, hogy $b^2 + ab + b = 0$. 1 pont

Utóbbiba behelyettesítve a $b = -2a^2$-t $\left(-2a^2\right)^2 - 2a^3 - 2a^2 = 0$ adódik. 1 pont

$2a^2$-t kiemelve kapjuk, hogy $2a^2\left(2a^2 - a - 1\right) = 0$. 1 pont

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így megoldás, ha $a = 0$, $b = 0$, illetve ha a $2a^2 - a - 1 = 0$. 1 pont

Ha a és b is nulla, akkor a másodfokú egyenletünk az $x^2 = 0$ alakot ölti, melynek az a és b valóban megoldásai. 1 pont

Az $2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei az $a_1 = 1$ és az $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Ha $a = 1$, akkor $b = -2$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 + x - 2 = 0$, amelynek $a = 1$ és $b = -2$ valóban a megoldásai. 1 pont

Ha $a = -\dfrac{1}{2}$, akkor a $b = -\dfrac{1}{2}$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk az $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$, melynek viszont ezek az $a = -\dfrac{1}{2}$ és $b = -\dfrac{1}{2}$ értékek nem megoldásai. 1 pont

Tehát a feladatot a $(0; 0)$ és az $(1; -2)$ számpárok elégítik ki.

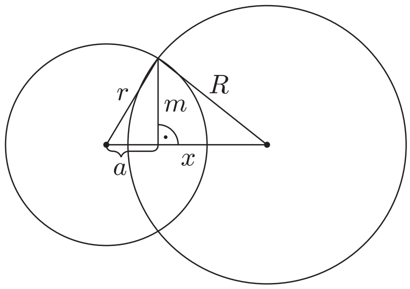
Összesen: 7 pont

4. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör középpontjainak távolsága 12 egység. Mindkét kör sugarának hossza egész szám. A metszéspontjukat összekötő egyenes a középpontjaik által meghatározott szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit!

Helyes ábra használható jelölésekkel. 1 pont



Jelölje r és R a körök sugarát, x a középpontok távolságát, m pedig a metszéspontokat összekötő szakasz felét!

Nyilvánvaló, hogy a metszéspontokat összekötő szakasz merőleges a középpontokat összekötő szakaszra, így két derékszögű háromszög keletkezik.

Írjuk fel ezekre Pitagorasz tételét!

$$r^2 = a^2 + m^2,$$

$$R^2 = (x-a)^2 + m^2.$$ 1 pont

Az egyenleteket kivonva egymásból a következő összefüggéshez jutunk:

$$R^2 - r^2 = x^2 - 2ax,$$

$$(R-r)(R+r) = x(x-2a).$$

Mivel: $x = 12$; $a = 4$; $x - a = 8$, behelyettesítés után adódik:

$$(R-r)(R+r) = 48.$$ 1 pont

A 48-at két tényezőre bontva öt eset adódik:

$$1 \cdot 48, \quad 2 \cdot 24, \quad 3 \cdot 16, \quad 4 \cdot 12 \quad \text{és} \quad 6 \cdot 8.$$

Az öt eset felismerése. 1 pont

$1 \cdot 48$ ekkor $R = 24{,}5$ és $r = 23{,}5$ (a sugarak nem egészek),

$2 \cdot 24$ ekkor $\underline{R = 13 \text{ és } r = 11}$,

$3 \cdot 16$ ekkor $R = 9{,}5$ és $r = 6{,}5$ (a sugarak nem egészek),

$4 \cdot 12$ ekkor $R = 8$ és $r = 4$ (a körök érintik egymást),

$6 \cdot 8$ ekkor $R = 7$ és $r = 1$ (a körök nem metszik egymást).

A megoldást nem jelentő esetek kizárása magyarázattal. 2 pont

(Ha magyarázat nélkül jelennek meg az esetek, illetve nem jelenik meg minden eset, akkor ez a 2 pont bontható.)

A feladat feltételeinek megfelelő megoldás tehát: $R = 13$ és $r = 11$.

A helyes megoldás megadása. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Hány rendezett (x, y, z) valós számhármas megoldása van az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66. \end{cases}$$

Megoldás. Az első egyenletből fejezzük ki z-t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$z = 11 - x - y$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^2 + 2y^2 + 3(11 - x - y)^2 = 66, \qquad \text{1 pont}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3\big(121 + x^2 + y^2 - 22x - 22y + 2xy\big) = 66,$$

$$4x^2 + 5y^2 + 297 - 66x - 66y + 6xy = 0. \qquad \text{1 pont}$$

Tekintsük ezt egy x-ben másodfokú y paraméterű egyenletnek. 1 pont

Rendezés után:

(I) $$4x^2 + 6(y - 11)x + \big(5y^2 - 66y + 297\big) = 0.$$

Ha az eredeti egyenletrendszernek van valós megoldása, akkor ennek a másodfokú egyenletnek is, ez utóbbi pontosan akkor áll fenn, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$D = \big(6(y - 11)\big)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \big(5y^2 - 66y + 297\big) \geqq 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$D = 36\big(y^2 - 22y + 121\big) - 16\big(5y^2 - 66y + 297\big) =$$

$$= 4 \cdot \Big(9\big(y^2 - 22y + 121\big) - 4\big(5y^2 - 66y + 297\big)\Big) =$$

$$= 4 \cdot \big(- 11y^2 + 66y - 99\big) = -44 \cdot \big(y^2 - 6y + 9\big) = -44 \cdot (y - 3)^2 \geqq 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $(y - 3)^2 = 0$, azaz $y = 3$. 2 pont

Ezt (I)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $4x^2 - 48x + 144 = 0$, aminek egyetlen megoldása az $x = 6$.

Mindezek felhasználásával $z = 11 - x - y = 11 - 6 - 3 = 2$, tehát egyetlen ilyen valós számhármas létezhet, a $(6, 3, 2)$. 1 pont

A megoldás kielégíti az egyenletrendszert.

Összesen: 7 pont