Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. (döntő) forduló
Kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a $p^\alpha = 2^\beta + 1$ egyenletet, ahol α, β 1-nél nagyobb egész számok, p^α pedig egy prímhatvány!

Megoldás. Ha α páros, azaz $\alpha = 2k$, akkor

$$2^\beta = \left(p^k - 1\right)\left(p^k + 1\right),$$

ahol a tényezők különbsége 2, és a szorzat 2-hatvány.

Ez nem teljesülhet másképpen, csak ha $p^k - 1 = 2$ és $p^k + 1 = 4$, azaz $p^k = 3$, így $p^\alpha = 9$, vagyis $p = 3$, $\alpha = 2$.

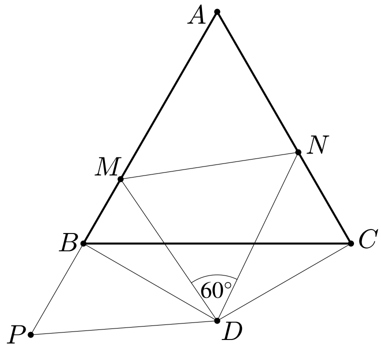
Ha α páratlan, akkor

$$2^\beta = (p - 1)\left(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \ldots + p + 1\right),$$

amely szorzat második tényezőjében egy páratlan tagú összeg szerepel, melynek minden tagja páratlan. Így az az összeg, amely osztója a baloldalnak, csak az 1 lehet. Ez pedig nem lehetséges.

2. Az ABC egységoldalú szabályos háromszög, melynek BC oldalára kifelé olyan BDC egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, amelyben $DB = DC$ és $BDC\sphericalangle = 120°$. Az AB és AC oldalakon olyan M és N pontokat jelölünk ki, melyekre $MDN\sphericalangle = 60°$. Határozzuk meg az AMN háromszög kerületét.

I. megoldás.



A BDC egyenlőszárú háromszögben $DBC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 30°$, így $DB \perp AB$ és $DC \perp AC$. Jelöljük ki az AB oldal B-n túli meghosszabbításán azt a P pontot, amelyre $BP = CN$.

Ekkor $DCN\triangle \cong DBP\triangle$, mivel két-két oldaluk és az oldalak által közbezárt szög azonos. Az egybevágóság alapján $DP = DN$ és $PDB\sphericalangle = NDC\sphericalangle$.

Ezt felhasználva:

$$PDN\sphericalangle = PDB\sphericalangle + BDN\sphericalangle = \\ = CDN\sphericalangle + BDN\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 120°$$

és így

$$PDM\sphericalangle = PDN\sphericalangle - MDN\sphericalangle = 120° - 60° = 60°.$$

A kapott eredmények alapján $PDM\triangle \cong NDM\triangle$, mivel két-két oldaluk és az oldalak által közbezárt szög azonos.

A két háromszög egybevágóságát felhasználva:

$$MN = MP = MB + BP = MB + NC.$$

Így

$$K_{AMN\triangle} = AM + AN + MN = AM + MB + AN + NC = AB + AC = 2$$

II. megoldás. Rajzoljuk meg a D középpontú $DB = DC$ sugarú k kört! Mivel $DBA\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 90°$, az AB és AC oldalegyenesek érintik k-t (a B, illetve C pontokban).

Húzzuk meg az M pontból k másik (AB-től különböző) érintőjét, ez érintse K-t a T pontban, és messe AC-t az N' pontban!

Az M pontból a k-hoz húzott érintők érintési pontjai tehát B és T, ezek a D középpontból az M-be húzott egyenesre szimmetrikusak, következésképp $MBDT$ deltoid. Ugyanígy $N'CDT$ is deltoid.

A deltoidokban a szimmetriaátlók felezik a rájuk eső szögeket, így $MDN'\sphericalangle = 60°$, ezért $N = N'$.

Ismét a deltoidok szimmetriáját felhasználva $MT{=}MB$ és $NT{=}NC$, tehát

$$AM + MN + NA = AM + MT + TN + NA = AM + MB + CN + NA = AB + CA = 2.$$

3. Egy 2015×2016-os sakktábla minden négyzetében egy-egy nemnegatív egész szám áll (az i-edik sor j-edik mezőjében lévő számot $a_{i,j}$ jelöli). Ezután minden lépésben kiválasztunk egy 2×2-es négyzetet, és az ebben szereplő négy számhoz hozzáadunk egy tetszőlegesen megválasztott (a négy mező esetében azonos) k egész számot úgy, hogy a kapott számok ne legyenek negatívak. Adjunk meg egy olyan egyenletet az $a_{i,j}$ ($1 \leqq i \leqq 2015$, $1 \leqq j \leqq 2016$) számokra, mint változókra, ami pontosan akkor teljesül, ha véges sok lépéssel elérhető, hogy a táblán szereplő összes szám nullává váljon.

Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges sort (vagy oszlopot), és tekintsük az ezen belüli váltott előjelű összegét a számoknak: pl. az i-edik sor esetében ez az összeg $a_{i,1} - a_{i,2} + {} + a_{i,3} - \ldots + \ldots$ lesz. Azt állítjuk, hogy a lépések ennek értékén nem változtatnak. Ha a kiválasztott 2×2-es négyzetnek egyetlen mezője sem esik ebbe a sorba (vagy oszlopba), akkor ez nyilvánvaló. Ellenkező esetben a 2×2-es négyzet az adott sorból (oszlopból) pontosan két, szomszédos mezőt fog tartalmazni, így a váltott előjelű összegben egy $+$ és egy $-$ előjellel szereplő tag fog k-val nőni, így a váltott előjelű összeg nem változik.

A végén minden számnak 0-nak kell lennie, így ilyenkor mind a $2015 + 2016 = 4031$ darab váltott előjelű összeg 0. Ha egy kiindulási helyzetből elérhető a csupa-0 állapot, akkor már kezdetben is mind a 4031 előjeles összegnek 0-nak kell lennie. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a 4031 darab előjeles összeg négyzetösszegének 0-nak kell lennie, hiszen valós számok négyzetének összege pontosan akkor 0, ha mindegyikük 0. Ez a négyzetösszeg tehát az a_{ij} változók egy homogén másodfokú polinomja lesz, vagyis a szükséges feltételként kapott egyenlet:

$$\begin{aligned} &(a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3} - \ldots + \ldots)^2 + (a_{2,1} - a_{2,2} + a_{2,3} - \ldots + \ldots)^2 + \ldots + \\ &+ (a_{2015,1} - a_{2015,2} + a_{2015,3} - \ldots + \ldots)^2 + (a_{1,1} - a_{2,1} + a_{3,1} - \ldots + \ldots)^2 + \\ &+ (a_{1,2} - a_{2,2} + a_{3,2} - \ldots + \ldots)^2 + \ldots + (a_{1,2016} - a_{2,2016} + a_{3,2016} - \ldots + \ldots)^2 = 0. \end{aligned}$$

Egyelőre azt mutattuk meg, hogy ez a feltétel szükséges ahhoz, hogy elérhető legyen a csupa-0-állapot, most belátjuk, hogy elégséges is. Tegyük fel tehát, hogy a váltott előjelű összegek négyzetösszege 0, vagyis minden sorban és minden oszlopban 0 a váltott előjelű összeg. Fenti észrevételünk szerint ez akárhány lépés végrehajtása után is érvényben fog maradni.

Először megmutatjuk, hogy a csupa-0-állapot elérhető, ha megengedjük, hogy esetleg negatív számokat is kapjunk a lépések során. Kövessük a következő eljárást. A bal felső 2×2-es négyzetben lévő számokhoz adjunk annyit, hogy a bal felső elem 0-vá váljon. Ezután az ettől 1-gyel jobbra lévő 2×2-es négyzetben lévőkhöz adjunk annyit, hogy az 1. sor 2. eleme is 0-vá váljon, és így tovább, mindezt folytatjuk a jobb felső 2×2-es négyzetig, aminél annyit adunk a számokhoz, hogy az első sor utolsó előtti, 2015-ödik száma is 0-vá váljon. Mivel az 1. sorban az elemek váltott előjelű összege ekkor is 0, ezért a legutolsó, 2016-ik elem is kinullázódik ezáltal. Vagyis az 1. sort sikerült 0-vá tenni.

Ezután ugyanígy folytatjuk a 2. sorral, és így tovább, egészen a 2014. sorig minden elem 0-vá változtatható. Az utolsó, 2015. sorban ekkor 0-k lesznek, ugyanis az összes oszlopban 0 kell legyen a váltott előjelű összeg. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenlet teljesülése esetén minden kinullázható, ám lehetséges, hogy közben a táblázatban negatív számok is előfordultak.

Ha ilyen nem volt, készen vagyunk, ha volt, akkor az eljárás során kapott negatív számok közül a legkisebbnek legyen az abszolútértéke m. Módosítsuk az eljárást a következő módon: mielőtt a fenti lépéssorozatba belekezdenénk, adjunk minden 2×2-es négyzet mezőihez m-et: így minden mezőben legalább m-mel nagyobb szám fog szerepelni (a sarkokban m-mel, a szélső, de nem sarokmezőkben $2m$-mel, a többi mezőben $4m$-mel nagyobb). Ezután végrehajtjuk a lépéseket, pontosan úgy, ahogy akkor tettük, amikor még nem figyeltünk arra, hogy csak nemnegatív számok kerüljenek a mezőkbe. Mivel az akkor kapott legkisebb szám $-m$ volt, ezért most nem kapunk negatív értékeket. A végén pedig minden 2×2-es négyzet mezőihez $-m$-et adunk, így megkapjuk a csupa-0 állapotot. A végén végrehajtott lépések során csak csökkennek az értékek, és a végén minden 0 lesz, így negatív értékeket ekkor sem állítunk elő. Ezzel állításunkat igazoltuk, valóban szükséges és elégséges feltételt kaptunk.