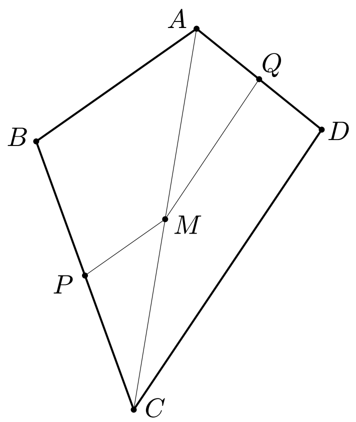
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
3. (döntő) forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre osztja. Az AC átlón felvett M (belső) ponton át az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a BC oldalt a P pontban, az M ponton átmenő és a CD-vel párhuzamos egyenes az AD oldalt a Q pontban metszi. Hogyan kell az M pontot megválasztani, hogy az MPC és az MQA háromszögek területeinek összege minimális legyen?

Megoldás.



$ABC\triangle \sim MPC\triangle$ és $ACD\triangle \sim AMQ\triangle$, mert két-két szögük páronként egyenlő. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő. 1 pont

Legyen $MC = \lambda \cdot AC$. Ekkor a hasonlóság miatt $MP = \lambda \cdot AB$ és $MQ = (1-\lambda)\cdot CD$. 1 pont

Jelöljük az ABC és a CDA háromszögek területét t-vel ($t_{ABC} = t_{CDA}$).

$$(3) \qquad \frac{t_{MPC}}{t} = \left(\frac{MP}{AB}\right)^2 = \lambda^2 \quad (0 < \lambda < 1) \quad \text{és}$$

$$(4) \qquad \frac{t_{MQA}}{t} = \left(\frac{MQ}{CD}\right)^2 = (1-\lambda)^2.$$ 1 pont

(3)-at és (4)-et rendezve, összeadva

$$t_{MPC} + t_{MQA} = t\big(\lambda^2 + (1-\lambda)^2\big).$$ 1 pont

Teljes négyzetté kiegészítést végzünk

$$t_{MPC} + t_{MQA} = t\left(2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right).$$ 1 pont

Mivel $2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$, ezért $t_{MPC} + t_{MQA} \geqq \frac{t}{2}$.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\lambda = \frac{1}{2}$, azaz $\frac{MP}{AB} = \frac{1}{2}$. 1 pont

Ekkor az M pont az AC átló felezőpontja, a keresett minimum értéke $\frac{t}{2}$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Felírtuk egy táblára a számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk kettőt, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és felírjuk helyette a hányados egészrészét. Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak maradt szám?

Megoldás. Mivel a hányados legalább 1, ezért mindig a nagyobb számot osztjuk el a nem kisebbel. 2 pont

Másrészt mindig legalább eggyel osztunk, ezért mindig legfeljebb a két szám maximumát írhatjuk fel a táblára. Tehát az elérhető maximum legfeljebb 10. 2 pont

Ez el is érhető. Töröljük le először a 2–3, 4–5, 6–7, 8–9 párokat. Ekkor lesz néhány egyesünk és egy tizesünk. Ekkor az egyeseket párosítva a 10-essel, mindig 10 marad. Tehát elérhető, hogy 10 maradjon a táblán. 3 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármilyen olyan törlési sorrend megadása 3 pontot ér, amely végén 10 marad a táblán.

3. Egy n pozitív egész szám esetén jelölje $f(n)$ azt a legkisebb pozitív egész k számot, amelyre igaz, hogy $k!$ osztható n-nel. Igazoljuk, hogy végtelen sok n esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} > 1{,}99!$$

Megoldás. Legyen $n = p$, ahol $p > 3$ prím. Mivel p felbonthatatlan, ezért p-nek szerepelnie kell a tényezők között, azaz $f(p) = p$. 2 pont

Térjünk át $f(p+1)$-re: Mivel $p+1$ tényezői között szerepel a 2 és a $\frac{p+1}{2}$ és ezek különbözőek, így $\left(\frac{p+1}{2}\right)!$ osztható $p+1$-gyel, tehát $f(p+1) \leqq \frac{p+1}{2}$. 2 pont

$$\frac{f(p)}{f(p+1)} \geqq \frac{p}{\frac{p+1}{2}} > 1{,}99,$$ 1 pont

$$0{,}01p > 1{,}99,$$

$$p > 199.$$ 1 pont

Azaz az egyenlőtlenség minden 199-nél nagyobb prímre teljesül, azaz végtelen sokszor. 1 pont

Összesen: 7 pont