Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. 2 018 000 Ft-ot szeretnénk 1000, 2000, és 5000 Ft-os papírpénzek felhasználásával kifizetni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik pénzből elegendően sok van a pénztárcánkban? **7 pont**

Megoldás: A feladat a $2018 = a + 2b + 5c$ diofantoszi egyenlet nemnegatív megoldásainak számát kéri. A c értékei szerint vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket. 1 pont

a	3	1	8	6	4	2	0	13	11	9	...	1
b	0	1	0	1	2	3	4	0	1	2	...	6
c	403	403	402	402	402	402	402	401	401	401	...	401
esetek száma		2					5					7

a	18	...	0	23	...	1	...	2013	...	1	2018	...	0
b	0	...	9	0	...	11	...	0	...	1006	0	...	1009
c	400	...	400	399	...	399	...	1	...	1	0	...	0
esetek száma			10			12				1007			1010

2 pont

Megfigyelhető, hogy az egymást követő esetek (c paritásától függően) 2-vel, illetve 3-mal növelik a lehetőségek számát. 2 pont

Így

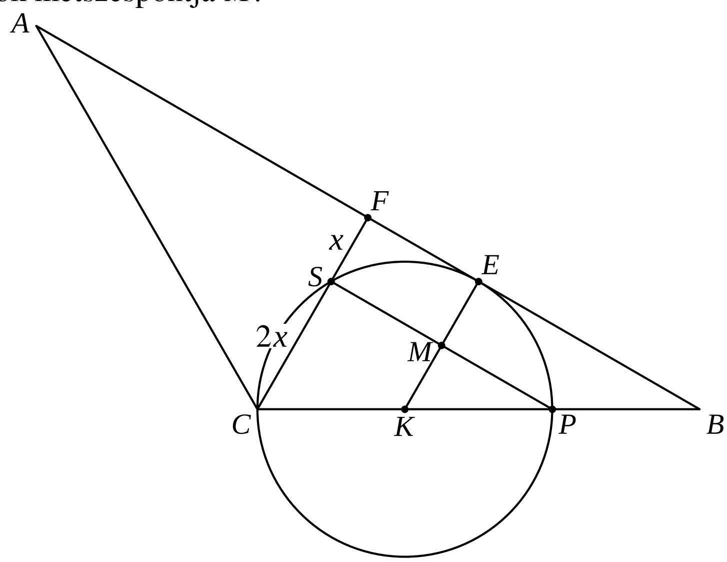
$$2 + 5 + 7 + 10 + 12 + \ldots + 1007 + 1010 =$$
$$= \frac{(2 + 1007) \cdot 202}{2} + \frac{(5 + 1010) \cdot 202}{2} = 101 \cdot (1009 + 1015) = 204\,424$$

lehetőség adódik. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Adott egy egyenlő szárú háromszög, továbbá egy olyan kör, amelynek középpontja rajta van a háromszög egyik szárán, és érinti a háromszög alapját. A körre illeszkedik a háromszög alappal szemközti csúcsa és a súlypontja is. Határozzuk meg a háromszög szögeit!

Megoldás: A háromszög csúcsai legyenek A, B, C (AB az alap), a súlypont S, a kör középpontja K, a kör C-vel átellenes pontja P, az alap felezőpontja F, a kör és az alap érintési pontja E, a KE és az SP szakaszok metszéspontja M.



Az FC súlyvonal egyben magasság is, így FC merőleges AB-re. Legyen $SF = x$, ekkor $SC = 2x$. 1 pont

Thalész tétele szerint $CSP\sphericalangle = 90°$, így SP párhuzamos FB-vel. 1 pont

KE merőleges AB-re, ezért a KM szakasz merőleges SP-re. 1 pont

Az MKP háromszög és az SCP háromszög hasonlók, a hasonlóság aránya $KP : CP = 1 : 2$. Így $KM = \frac{1}{2}SC = x$. 1 pont

Az $SFEM$ négyszög téglalap, így $ME = SF = x$, így a kör sugara $KP = KE = KM + ME = 2x$. 1 pont

Tehát az MKP háromszög KP átfogója kétszerese az MK befogónak, ezért $MPK\sphericalangle = 30°$, 1 pont

mivel a $CBA\sphericalangle$ egyállású az $MPK\sphericalangle$-gel, ezért ez utóbbi is 30°.

Tehát az ABC háromszög alapon fekvő szögei 30°-osak, a szárak szöge pedig 120°. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Másik megoldás: Mivel CS a kör húrja, így a kör középpontja (K) illeszkedik CS szakaszfelező merőlegesére. 1 pont

Ez a merőleges egyrészt felezi CS-t, azaz átmegy a súlyvonal C-hez közelebbi harmadolópontján, 1 pont

másrészt párhuzamos a CF-re ugyancsak merőleges alappal. 1 pont

Emiatt K harmadolja a CB oldalt. 1 pont

Eszerint $KB = 2CK = 2r = 2KE$. 1 pont

Azaz $KBE\sphericalangle = 30°$, ezért az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge 30°. 1 pont

A háromszög szögei 30°, 30°, 120°. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$x^2 \leq \{x + 2018\} \cdot (2[x] + \{x\})$$

(Az $[a]$ kifejezés az a szám egészrészét adja meg, amely definíció szerint az a számnál nem nagyobb legnagyobb egész számot jelenti. Az $\{a\}$ szám az a szám törtrészét határozza meg, amelyet úgy kaphatunk meg, hogy az a valós számból kivonjuk ez egészrészét.) **7 pont**

Megoldás: A definíció alapján észrevehetjük, hogy $\{x + 2018\} = \{x\}$. 1 pont

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához $[x]^2$-et adva és a jobb oldali zárójelet felbontva az

$$[x]^2 + x^2 \leq \{x\}^2 + 2[x]\{x\} + [x]^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

Az azonosságot észrevéve

$$[x]^2 + x^2 \leq (\{x\} + [x])^2.$$ 1 pont

A zárójelben lévő kifejezés éppen az x valós számot jelenti, 1 pont
így az $[x]^2 \leq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, 1 pont
ami $x \in [0; 1[$ esetén teljesül. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Tekintsük azt a legbővebb halmazt, amelynek az elemei olyan pozitív egész számok, amelyek prímtényezős felbontásában csak az első 2018 darab prímszám közül fordulhatnak elő prímszámok, és mindegyik előforduló prím az első hatványon szerepel. Igazoljuk, hogy ennek a halmaznak megadható 2^{2017} elemű részhalmaza úgy, hogy a részhalmazból bármely két elemnek 1-nél nagyobb a legnagyobb közös osztója, de $\left(2^{2017} + 1\right)$-elemű ilyen tulajdonságú részhalmaza már nincs! **7 pont**

Megoldás: Minden prímszám esetén kétféleképpen dönthetünk, vagy szerepeltetjük egy szám felbontásában, vagy nem, ezért a legbővebb halmaznak 2^{2018} eleme van. 1 pont

Vegyük az összes számot, amelynek a felbontásában szerepel a 2. A többi prím esetén kétféleképpen dönthetünk, ezért 2^{2017} ilyen szám van. Ezek közül bármely kettőnek legalább 2 a legnagyobb közös osztója. 2 pont

Rendezzük a halmaz elemeit párokba. Egy szám párja az a szám legyen, amelynek prímtényezős felbontásában pont azok a prímszámok szerepelnek, amelyek az eredeti számban nem szerepelnek. 2 pont

Így 2^{2017} (rendezett) pár keletkezik. Ha $2^{2017} + 1$ számot veszünk az alaphalmazból, akkor biztos lesz egy pár, amelynek mindkét tagja szerepel, de ezek legnagyobb közös osztója 1. 2 pont

Összesen: **7 pont**