Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy minden irányban végtelen négyzethálós papírlap mindegyik mezőjébe egy-egy pozitív egész számot kell írnunk a következő feltételekkel:

- Az n szám éppen n-szer forduljon elő (azaz 1 darab 1-es, 2 darab 2-es stb. szerepeljen a lapon).
- Két tetszőleges, közös oldalú mezőbe kerülő számok különbsége kisebb legyen egy előre megadott k számnál.

Mi az a legkisebb egész k, amelyre a kitöltést el lehet végezni? **7 pont**

2. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. Legyenek A' a BCD, B' az ACD, C' az ABD és D' az ABC háromszög súlypontjai, míg F az AB, G a BC, H a CD és I a DA oldal felezőpontja.

Igazoljuk, hogy a $C'FD'GA'HB'I$ nyolcszög területe az $ABCD$ négyszög területének és az $A'B'C'D'$ négyszög területének mértani közepe! **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy a 2018 elemű $H = \{1!; 2!; 3!; \ldots; 2017!; 2018!\}$ halmazból elhagyhatunk két elemet úgy, hogy a megmaradó 2016 darab elem szorzata négyzetszám legyen! **7 pont**