Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy osztályba 33 diák jár. Minden tanulót megkérdeztünk arról, hogy hány osztálytársának azonos vele a keresztnevének, illetve a vezetéknevének kezdőbetűje. Tanulónként a két-két választ felírva kiderült, hogy 0-tól 10-ig minden szám előfordult a válaszok között. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van az osztályban legalább két olyan diák, akinek ugyanazzal a betűvel kezdődik a vezetékneve és a keresztneve is! **10 pont**

2. Az (a_n) véges sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 20$, $a_2 = 5$, utolsó eleme $a_k = 0$ és $2 \leq n < k$ esetén

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}.$$

Határozzuk meg azt a k indexet, amire $a_k = 0$! **10 pont**

3. Legyen $ABCD$ egység oldalú négyzet. Az AB, BC, CD, DA oldalakon jelöljünk ki olyan P, Q, R, S pontokat, hogy $AP + AS + CQ + CR = 2$. Bizonyítsuk be, hogy a PR és QS szakaszok merőlegesek egymásra! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy osztályba 33 diák jár. Minden tanulót megkérdeztünk arról, hogy hány osztálytársának azonos vele a keresztnevének, illetve a vezetéknevének kezdőbetűje. Tanulónként a két-két választ felírva kiderült, hogy 0-tól 10-ig minden szám előfordult a válaszok között. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van az osztályban legalább két olyan diák, akinek ugyanazzal a betűvel kezdődik a vezetékneve és a keresztneve is! **10 pont**

Megoldás: Jelöljük m-mel ($m \in \mathbb{N}^+$) az osztály tanulói között előforduló vezetéknevek kezdőbetűinek számát, x_i-vel pedig az i-edik kezdőbetű előfordulásának gyakoriságát ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$)!

Hasonlóképpen jelöljük n-nel ($n \in \mathbb{N}^+$) a diákoknál előforduló keresztnevek kezdőbetűinek számát, y_j-vel pedig a j-edik kezdőbetű előfordulásának gyakoriságát ($j \in \{1; 2; \ldots; n\}$)!

Ekkor a tanulók száma alapján: $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 33$ és így $\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j = 66$. 1 pont

Használjuk fel, hogy amennyiben egy tanuló k számú ($k \in \mathbb{N}$) társáról nyilatkozik úgy, hogy egyik nevének megfelelő kezdőbetűje azonos az övével, akkor ezzel a vezeték- vagy keresztnév kezdettel összesen $k + 1$ diák rendelkezik. 1 pont

Mivel a diákok válaszai között a 0-tól 10-ig terjedő számok mind előfordultak, ezért az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számok biztosan elemei az $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ halmaznak. 1 pont

Viszont $66 = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j \geq 1 + 2 + \ldots + 11 = 66$ feltétel csak az egyenlőség fennállása esetén teljesülhet, ami azt jelenti, hogy az x_i, y_j számok az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számok valamilyen sorrendjét adják és $m + n = 11$. 2 pont

Ekkor $m < 8$ és $m > 3$, hiszen $m \geq 8$ esetén $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1 + 2 + \ldots + 8 = 36 > 33$, illetve $m \leq 3$ esetén $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq 9 + 10 + 11 = 30 < 33$. 2 pont

Így a lehetséges $(m; n)$ párok: $(4; 7)$, $(5; 6)$, $(6; 5)$, $(7; 4)$, amelyek esetén a vezeték- és keresztnév kezdőbetű párosítások száma: 28, 30, 30, 28. 2 pont

Mivel a diákok száma (33) ezen esetek mindegyikénél több, ezért a skatulyaelv értelmében garantált, hogy legalább két tanuló monogramja teljesen azonos. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az (a_n) véges sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 20$, $a_2 = 5$, utolsó eleme $a_k = 0$ és $2 \leq n < k$ esetén

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}.$$

Határozzuk meg azt a k indexet, amire $a_k = 0$! **10 pont**

Megoldás: A rekurzív egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 2. \qquad \text{2 pont}$$

Felírva ezt $n = 2, 3, \ldots, (k-1)$-re:

$$\begin{aligned} a_3a_2 &= a_2a_1 - 2 \\ a_4a_3 &= a_3a_2 - 2 \\ &\vdots \\ a_ka_{k-1} &= a_{k-1}a_{k-2} - 2 \end{aligned}$$

Adjuk össze a fenti egyenleteket! Ekkor

$$0 = a_ka_{k-1} = a_2a_1 - 2 \cdot (k-2), \qquad \text{6 pont}$$

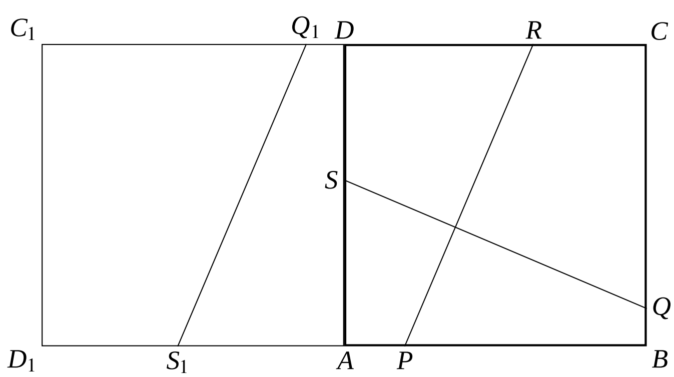
amiből

$$k = \frac{a_2a_1}{2} + 2 = 52. \qquad \text{2 pont}$$

Összesen: **10 pont**

3. Legyen $ABCD$ egység oldalú négyzet. Az AB, BC, CD, DA oldalakon jelöljünk ki olyan P, Q, R, S pontokat, hogy $AP + AS + CQ + CR = 2$. Bizonyítsuk be, hogy a PR és QS szakaszok merőlegesek egymásra! **10 pont**

Megoldás:



Mozgassuk el az AS és CQ szakaszokat úgy, hogy azok egy egyenesbe kerüljenek az AP és CR szakaszokkal! Ennek érdekében alkalmazzunk A középpontú $+90°$-os elforgatást! A megfelelő képpontokat jelöljük azonos nagybetűvel és 1-es indexszel ellátva! 3 pont

Ekkor $AS_1 = AS$ és $CQ = C_1Q_1$.

Így $PS_1 = AP + AS_1 = AP + AS = 2 - (CQ + CR) = CC_1 - (C_1Q_1 + CR) = RQ_1$. 3 pont

Mivel $PS_1 = RQ_1$, $PS_1 \parallel RQ_1$ alapján a $PQRS$ négyszög paralelogramma, és emiatt $PR \parallel S_1Q_1$. 2 pont

Másrészt a +90°-os elforgatás miatt az S_1Q_1 és SQ szakaszok merőlegesek egymásra, ezért a PR és SQ szakaszokra ugyanez teljesül. Ezzel az állítást beláttuk. 2 pont

Összesen: **10 pont**