

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy egy valós számnak és reciprokának négyzetösszege kettővel kisebb egy négyzetszámnál. Bizonyítsuk be, hogy a szám tetszőleges páratlanadik hatványához hozzáadva reciprokának ugyanezen hatványát, egész számot kapunk!
2. Legyen az ABC háromszög körülírt köre k ! Jelöljük a k kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját D -vel, B -t nem tartalmazó CA ívének felezőpontját E -vel és C -t nem tartalmazó AB ívének felezőpontját F -fel! ABC háromszög beírt köre érintse a BC , CA és AB oldalakat rendre a K , L , M pontokban! Bizonyítsuk be, hogy DK , EL és FM egyenesek egy pontban metszik egymást!
3. Bizonyítsuk be, hogy létezik $N > 1$ egész szám a következő tulajdonsággal: minden $n > N$ egész szám felbontható olyan pozitív egészek összegére, amelyeknek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint n^{2018} .