ADk2-2m 9900

1. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Az átfogó hossza nem osztható 5-tel. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének mérőszáma 10 többszöröse.

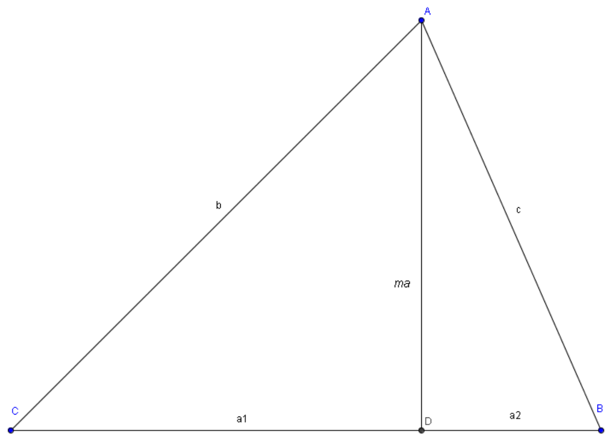
Mo: Ha egyik oldal sem osztható 5-tel, akkor a négyzeteik 5-ös maradéka 1, -1, így a befogók négyzetösszegének 5-ös maradéka 2, 0,-2 lenne, az átfogó négyzetének maradéka viszont 1, -1; tehát az egyik befogó osztható 5-tel.
Ha mindkét befogó páros, vagy valamelyik befogó 4-gyel osztható, akkor a terület 10-zel osztható. Ha mindkét befogó páratlan, akkor a négyzetösszegük 4-es maradéka 1+1=2, ami nem lehet négyzetszám. Ha egyik befogó páratlan, a másik 4k+2 alakú, akkor a befogók négyzetösszegének 8-as maradéka 1+4=5, ami szintén nem lehet négyzetszám.

2. Igazolja, hogy ha egy hegyesszögű háromszögben *a, b* és *c* jelöli az oldalakat, m_a az *a* oldalhoz tartozó magasságot, akkor $1 < \frac{a+2m_a}{b+c} < \sqrt{2}$.

Mo: $b < m_a + a_1$, $c < m_a + a_2$, összeadva, osztva kijön az alsó becslés.

Számtani és négyzetes középből: $\frac{a_1+m_a}{2} \le \sqrt{\frac{a_1^2+m_a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a_2+m_a}{2} \le \sqrt{\frac{a_2^2+m_a^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$,

ezeket is összeadva, osztva kijön a felső becslés. Egyenlőség csak egyenlőszárú derékszögű háromszögnél lenne.



3. Határozza meg a következő összeg pontos értékét:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}\,.$$

Mo: $\sqrt{1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=\sqrt{\frac{k^2(k-1)^2+k^2+(k-1)^2}{k^2(k-1)^2}}=\sqrt{\frac{(k(k-1)+1)^2}{k^2(k-1)^2}}=$

$=\frac{k(k-1)+1}{k(k-1)}=1+\frac{1}{k(k-1)}=1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Így $\sum_{k=3}^{2000}\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1998+\frac{1}{2}-\frac{1}{2000}$.