



OKÉV

Országos Közoktatási
Értékelési és Vizsgaközpont

GIMNÁZIUM

**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2005-2006. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Két iskola tanulói műveltségi vetélkedőn vettek részt. A 100 pontos teszten az első iskola diákjainak átlag pontszáma 74, ebből a fiúké 71, a lányoké 76. A második iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké 90 pont volt. Az összes résztvevő fiú átlaga 79 pont. Mennyi az összes résztvevő lány átlaga? *7 pont*

2. (a) Ábrázolja az $[1, \infty)$ halmazon értelmezett következő függvényt:

$$x \mapsto \sqrt[4]{1 - 2x + x^2} - \sqrt{x - \sqrt{4x - 4}}$$

(b) Jellemezze a függvényt a következő tulajdonságok szerint:

zérushelyek, értékkészlet,
korlátosság, szélsőértékek,
növekedés-csökkenés, monotonitás.

7 pont

3. Egy kocka éleit megszámozták az 1, 2, ..., 12 számokkal. András kiválaszt két olyan számot, amelyekhez tartozó éleknek egy közös csúcsuk van. Ugyanezt teszi tőle függetlenül Béla is. Mekkora a valószínűsége, hogy az András által választott éleknek nincs közös pontja a Béla által választott éllel? *7 pont*

4. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1 . A háromszög magasságpontja M , a BM szakasz felezőpontja F . A C_1F egyenes a BC oldalt Q -ban, az A_1B_1 egyenes a CC_1 -et S -ben metszi.

Bizonyítsuk be, hogy QS merőleges AC -re.

7 pont

5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegy közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$. *7 pont*