OKÉV Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

Gimnázium

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2005-2006. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Két iskola tanulói műveltségi vetélkedőn vettek részt. A 100 pontos teszten az első iskola diákjainak átlag pontszáma 74, ebből a fiúké 71, a lányoké 76. A második iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké 90 pont volt. Az összes résztvevő fiú átlaga 79 pont. Mennyi az összes résztvevő lány átlaga?

Megoldás: Jelölje az első iskolába járó fiúk és lányok számát rendre f_1, és l_1. A második iskola tanulói esetében ugyanez f_2 és l_2.

A feladat szövegének 2. 3. és 4. mondata alapján:

$$(1)\quad \frac{71f_1+76l_1}{f_1+l_1}=74,\qquad (2)\quad \frac{81f_2+90l_2}{f_2+l_2}=84,\qquad (3)\quad \frac{71f_1+81f_2}{f_1+f_2}=79.$$

3 pont

Alakítsuk át (1)-et: $71f_1+76l_1=74(f_1+l_1)$, átrendezve $2l_1=3f_1$, azaz

$$l_1=\frac{3}{2}f_1. \tag{4}$$

Hasonlóképpen kapjuk (2) és (3) alapján, hogy

$$l_2=\frac{1}{2}f_2,\qquad f_2=4f_1. \tag{5}$$

2 pont

A lányok átlagának kiszámítása (4) és (5) felhasználásával:

$$\frac{76l_1+90l_2}{l_1+l_2}=\frac{76\cdot\frac{3}{2}f_1+90\cdot 2f_1}{\frac{3}{2}f_1+2\cdot f_1}=84.$$

A lányok átlaga tehát 84. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. (a) Ábrázolja az $[1,\infty)$ halmazon értelmezett következő függvényt:

$$x\mapsto \sqrt[4]{1-2x+x^2}-\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}$$

(b) Jellemezze a függvényt a következő tulajdonságok szerint:
zérushelyek, értékkészlet,
korlátosság, szélsőértékek,
növekedés-csökkenés, monotonitás.

Megoldás: Mivel $x\geq 1$ és $1-2x+x^2=(x-1)^2$ ezért

$$\sqrt[4]{1-2x+x^2}=\sqrt{x-1}.$$

1 pont

A függvény képletében a kivonandó gyökjele alatt teljes négyzet áll, hiszen

$$x - \sqrt{4x-4} = (\sqrt{x-1} - 1)^2.$$

2pont

Ha $1 \le x < 2$, akkor $\sqrt{x-1} < 1$, ekkor a vizsgálandó függvény:

$$x \mapsto \sqrt{x-1} - (1 - \sqrt{x-1}) = 2\sqrt{x-1} - 1.$$

Ha $2 \le x$, akkor $\sqrt{x-1} \ge 1$, ekkor a vizsgálandó függvény:

$$x \mapsto \sqrt{x-1} - (\sqrt{x-1} - 1) = 1.$$

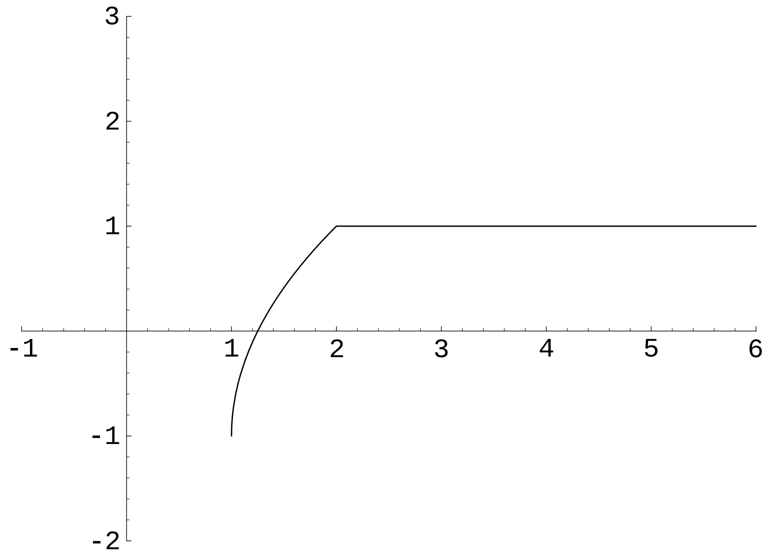
1 pont

A függvény zérushelye:

$$2\sqrt{x-1} - 1 = 0, \qquad \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}, \qquad x = \frac{5}{4}.$$

1 pont

A fentiek alapján a függvény ábrája:



1 pont

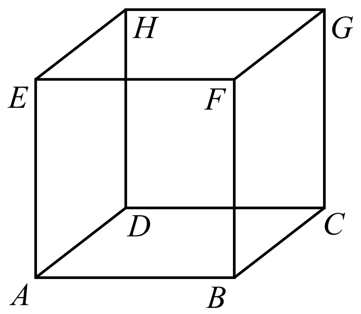
A függvény értékkészlete $[-1, 1]$. A függvény alulról és felülről is korlátos, legnagyobb alsó korlátja a -1, legkisebb felső korlátja a 1. A függvény mindkettőt fel is veszi. A függvény minimumhelye az $x = 1$-nél van, ekkor a függvény minimuma -1. A függvény maximuma az 1, ezt minden $2 \le x$ esetén felveszi.

A függvény az értelmezési tartományon monoton növő, a $[1, 2]$ intervallumon szigorúan monoton növő. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy kocka éleit megszámozták az 1, 2, ..., 12 számokkal. András kiválaszt két olyan számot, amelyekhez tartozó éleknek egy közös csúcsuk van. Ugyanezt teszi tőle függetlenül Béla is. Mekkora a valószínűsége, hogy az András által választott éleknek nincs közös pontja a Béla által választott élekkel ?

Megoldás: Betűzzük meg a kocka csúcsait az ábra szerint az $ABCDEFGH$ betűkkel úgy, hogy az András által választott csúcsok éppen AB és BC legyenek, jelölje ezt $A-B-C$.



(i) Nézzük meg, mely egymáshoz csatlakozó élpároknak nincs velük közös pontja. Az A, B, C pontokból induló élet nem választhatunk. Az ABC-vel egy lapon levő D csúcsból induló élek közül tehát csak DH választható. DH élhez választhatjuk a HE és a HG élt. További élpárnak nem lehet az A,B,C,D pontokkal közös pontja. Tehát az élpár mindkét éle az $EFGH$ lapon van. Ezen négy egymáshoz csatlakozó élpár van. Fenti jelölésünkkel a hat megfelelő élpár: $D-H-E$, $D-H-G$, $E-F-G$, $F-G-H$, $G-H-E$ és $H-E-F$. 3 pont

(ii) Most megszámoljuk, összesen hányféleképpen választható ki két egymáshoz csatlakozó él. Az első élet 12 közül választhatjuk ki. Ehhez, a végpontjaiból induló négy további él bármelyikét vehetjük. Az így adódó $12 \cdot 4 = 48$-nak csak a fele, 24 a megoldás. Figyelembe vettük ugyanis a sorrendjüket és így minden élpárt kétszer számoltunk.

3 pont

A keresett valószínűség az (i)-ben kiszámolt jó esetek számának és az (ii)-ben kiszámolt összes eset számának aránya, ami $\frac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont.

4. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. A háromszög magasságpontja M, a BM szakasz felezőpontja F. A C_1F egyenes a BC oldalt Q-ban, az A_1B_1 egyenes a CC_1-et S-ben metszi.

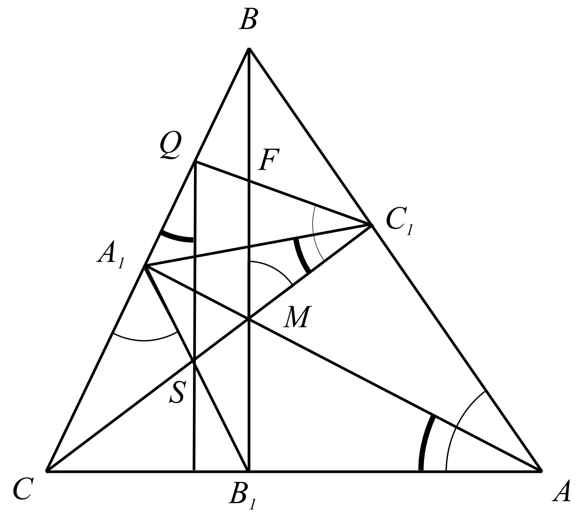
Bizonyítsuk be, hogy QS merőleges AC-re.

Megoldás: $BMC_1\angle = BAC\angle = \alpha$, mivel merőleges szárú hegyesszögek. BM Thalesz körén rajta van C_1, ennek a körnek középpontja F. Így $MF = FC_1$ és ezért

(1) $$FC_1M\angle = FMC_1\angle = \alpha.$$

AB Thalesz körén rajta van B_1 és A_1, tehát ABA_1B_1 húrnégyszög. Ebben az A_1-nél levő szög:

(2). $$BA_1B_1\angle = 180^\circ - \alpha$$



Az (1) és (2) összefüggések miat QA_1SC_1 húrnégyszög, mivel a szemközti A_1 és C_1 csúcsoknál levő szögeik összege éppen 180°. 4 pont

Ezen húrnégyszög köréírt körében az A_1S ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, ezért $A_1QS\angle = A_1C_1S\angle$. Ez utóbbi szög az AC Thalesz körén levő A_1C-hez tartozó kerületi szög és ezért $A_1C_1S\angle = A_1C_1C\angle = A_1AC\angle = 90° - \gamma$, ahol $\gamma = ACB\angle$.

Azt kaptuk, hogy $A_1QS\angle = 90° - \gamma$, tehát az SQ, AC és QC egyenesek derékszögű háromszöget alkotnak, azaz QS merőleges AC-re. 3 pont

Összesen: 7 pont.

Amennyiben a versenyző nem oldja meg a feladatot, de gondosan elkészített, helyes ábrát készít, ezért 1 pontot kap. További, összesen 1 pontot kaphat elemi észrevételekért (pl ABA_1B_1 húrnégyszög, AB_1MC_1 húrnégyszög, az ezekből adódó szögekre vonatkozó összefüggések).

Koordinátageometriai megoldás esetén: a magasságok talppontjainak meghatározásáért a csúcsok koordinátáival 1 pont. Az M, F pontok meghatározásáért további 1 pont. A Q és S pontok meghatározásáért 2-2 pont. Annak megmutatásáért, hogy QS merőleges AC-re 1 pont.

5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegy közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$.

Megoldás: Legyen A az összes n jegyű pozitív egészek halmaza, ennek elemszáma $|A| = 9 \cdot 10^{n-1}$, mivel az első jegy 9 féle lehet, a többi 10 féle. Legyen B az összes n jegyű pozitív egészek halmaza, melyekben nincs 1-es, C melyekben nincs 2-es. Ekkor $|B| = |C| = 8 \cdot 9^{n-1}$, mivel az első jegy 8 féle, a többi 9 féle lehet. Nekünk az $A \setminus (B \cup C)$ halmaz elemszámára van szükségünk. Ez

$$|A \setminus (B \cup C)| = |A| - |B| - |C| + |(B \cap C)|.$$

Le kell ugyanis vonnunk az összesből az 1-est és a 2-est nem tartalmazókat. Így kétszer vontuk le azokat a számokat, melyekben nincs se 1-es, se 2-es. Ezek alkotják a $B \cap C$ halmazt, melynek elemszáma $|B \cap C| = 7 \cdot 8^{n-1}$. Ezt hozzá kell adni. Tehát $f(n)$ értéke :

$$f(n) = 9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1} + 7 \cdot 8^{n-1}.$$

3 pont

Például $n = 2$ esetén képletünkből $f(2) = 2$ adódik. A két megfelelő szám a 12 és a 21. A következő néhány érték egyike sem négyzetszám, ez látszik a prímtényezős felbontásukból: $f(3) = 52 = 2^2 \cdot 13$, $f(4) = 920 = 2^3 \cdot 5 \cdot 23$, $f(5) = 13696 = 2^7 \cdot 107$.

A 3-as maradékot tekintve $f(n)$ maradéka megegyezik $7 \cdot 8^{n-1}$ maradékával. Ha n páros, akkor ez 2. Négyzetszám 3-as maradéka viszont nem lehet 2. Így $f(6)$ sem lehet négyzetszám, hiszen $n = 6$ páros. 1 pont

Ha $n \geq 7$, akkor

$$f(n) = 16 \left(\frac{9 \cdot 10^{n-1}}{16} - 9^{n-1} + \frac{7 \cdot 8^{n-1}}{16} \right).$$

Mivel a 16 négyzetszám és a zárójelben álló szám egész, $f(n)$ csak akkor lehetne négyzetszám, ha a zárójeles kifejezés maga is négyzetszám lenne. Vizsgáljuk a 4-es maradékot! A két tört számlálója legalább 2^6-nal osztható, a 16-tal való osztás után is 4-gyel oszthatók maradnak. A 9^{n-1} 4-es maradéka 1, így a zárójelben $4k - 1$ alakú szám áll, ami nem lehet négyzetszám. 3 pont

Összesen: 7 pont.