

Gimnázium

**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2005-2006. tanévi második fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget, ha $x > 0$:

$$x^{2 \sin x - \cos(2x)} < \frac{1}{x}.$$

2. A valós számokon értelmezett $f(x) = ax^2 - bx + c$ másodfokú függvény a együtthatójára $1 > |a| \neq 0$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(a) = -b$ és $f(b) = -a$, akkor $|c| < 3$.

3. Az $ABCD$ konvex négyszögben $\angle ABD = \angle ACD$. Legyenek a BC és AD élek felezőpontjai rendre E és F . Az AC és BD átlók metszéspontjának az AB és CD oldal-egyenesekre eső merőleges vetületei G és H .

Igazoljuk, hogy az EF és GH egyenesek egymásra merőlegesek.

4. Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az $ac, bc + ad, bd$ mindegyike osztható az n egészszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc + ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n -nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.