Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2005-2006. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget, ha $x > 0$:

$$x^{2\sin x - \cos(2x)} < \frac{1}{x}.$$

Megoldás: Az egyenlőtlenség jobb oldalán x^{-1} áll. Ha $x = 1$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalán 1 áll, azaz egyenlőség van. Tehát az $x = 1$ nem megoldás. 1 pont

Ha $0 < x < 1$, akkor a kitevők között a következő relációnak kell teljesülnie:

$$2\sin x - \cos(2x) > -1.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk 1-et és alkalmazzuk az $1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$ azonosságot:

$$2\sin x + 2\sin^2 x = 2\sin x(1 + \sin x) > 0.$$

Mivel $0 < x < 1$, ezért $\sin x$ pozitív és így az egyenlőtlenség a vizsgált tartomány minden x értékénél teljesül. 3 pont

Ha $1 < x$, akkor a kitevőket vizsgálva a relációs jel iránya más, iménti átalakításainkat használva a megoldandó egyenlőtlenség:

$$2\sin x(1 + \sin x) < 0.$$

A bal oldalon található szorzatban az $1 + \sin x$ tényező soha nem lehet negatív, 0 is csak akkor lehet, ha $\sin x = -1$. Az egyenlőtlenség tehát akkor teljesül, ha $\sin x$ negatív, de nem -1. Ekkor a megoldás

$$(2k-1)\pi < x < (2k-0,5)\pi \quad k \in N^+; \qquad (2l-0,5)\pi < x < 2l\pi \quad l \in N^+.$$

Összefoglalva, a megfelelő x értékek:

$$0 < x < 1; \qquad (2k-1)\pi < x < (2k-0,5)\pi \quad k \in N^+; \qquad (2l-0,5)\pi < x < 2l\pi \quad l \in N^+.$$

3 pont

Összesen: 7 pont

2. A valós számokon értelmezett $f(x) = ax^2 - bx + c$ másodfokú függvény a együtthatójára $1 > |a| \neq 0$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(a) = -b$ és $f(b) = -a$, akkor $|c| < 3$.

Megoldás: Mivel $f(a) = -b$ és $f(b) = -a$, a függvényt definiáló kifejezésbe helyettesítve a következőt kapjuk:

$$(1) \qquad a^3 - ab + c = -b, \qquad (2) \qquad ab^2 - b^2 + c = -a.$$

Vegyük (1) és (2) megfelelő oldalainak különbségét, majd alakítsunk szorzattá:

$$a(a^2 - b^2) + b(b - a) = a - b,$$

$$(a - b)(a^2 + ab - b - 1) = 0,$$

$$(a - b)(a - 1)(a + b + 1) = 0. \tag{3}$$

4 pont

Most vegyük sorra a (3)-ban kapott szorzat bal oldalán álló tényezőket, mikor lesz értékük 0.

Ha $a - b = 0$, akkor (1) alapján $a^3 - a^2 + a = -c$. Mivel $1 > |a|$, ezért

$$3 > |a^3| + |a^2| + |a| \geq |c|.$$

Ha $a - 1 = 0$, akkor $a = 1$, de ez a feladat feltételei szerint nem lehet. Egyébként $a = 1$ esetén (1) alapján $c = -1$ és így $|c| < 3$.

Ha $a+b+1 = 0$, akkor ebből $b = -1-a$ adódik, ezt (1)-be helyettesítve $a^3+a^2-1 = -c$. Mivel $1 > |a|$, ezért

$$3 > |a^3| + |a^2| + 1 \geq |c|.$$

3 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABD\angle = ACD\angle$. Legyenek a BC és AD élek felezőpontjai rendre E és F. Az AC és BD átlók metszéspontjának az AB és CD oldalegyenesekre eső merőleges vetületei G és H.

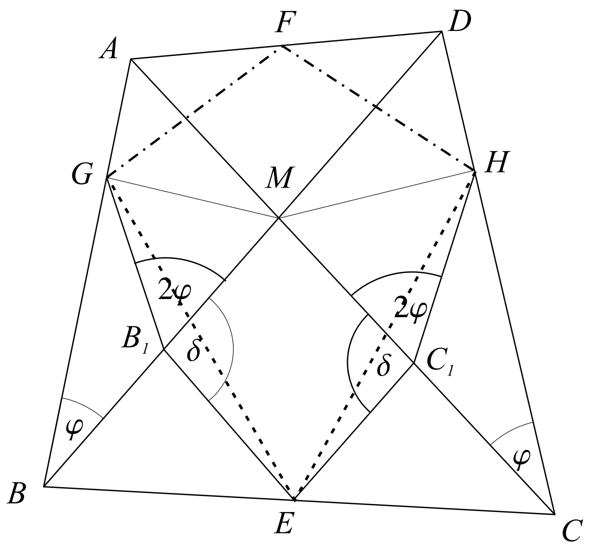
Igazoljuk, hogy az EF és GH egyenesek egymásra merőlegesek.

Megoldás: Legyen az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja M, az MB és MC szakaszok felezőpontjai rendre B_1 és C_1. A feladat szövege szerint $ABD\angle = ACD\angle$, legyen $\varphi = GBM\angle = HCM\angle$.

Mivel MC Thalesz körének középpontja C_1 és ezen a körön rajta van H, ezért $HC_1 = MC_1 = CC_1$. A HC_1C egyenlőszárú háromszög C_1-nél levő külső szöge $HC_1M\angle = 2\varphi$.

Ugyanígy MB Thalesz körének középpontja B_1 és ezen a körön rajta van G, ezért $B_1G = MB_1 = BB_1$. A GB_1B egyenlőszárú háromszög B_1-nél levő külső szöge $GB_1M\angle = 2\varphi$.

2 pont



Az MBC háromszögben C_1E és B_1E középvonalak, $EB_1 = MC_1$ és $C_1E = MB_1$. MB_1EC_1 paralelogramma, szemközti szögei egyenlők, $MC_1E\angle = MB_1E\angle = \delta$.

Most megmutatjuk, hogy HC_1E és EB_1G egybevágó háromszögek. Két oldaluk ugyanolyan hosszú: $HC_1 = EB_1$, hiszen mindkettő egyenlő MC_1; továbbá $C_1E = B_1G$, hiszen mindkettő egyenlő MB_1. Az említett egybevágó háromszögekben a vizsgált oldalpárok által bezárt szög ugyanakkora:

$$HC_1E\angle = 2\varphi + \delta = EB_1G\angle.$$

3 pont

Az egybevágó HC_1E és EB_1G háromszögekben $HE = GE$, ezért E rajta van HG felező merőlegesén.

DMC és AMB hasonló háromszögek, $DMC\angle = AMB\angle$ csúcsszögek, a feladat szövege szerint pedig $ABD\angle = ACD\angle$. Ezért $BDC\angle = BAC\angle$. Innentől kezdve a fenti gondolatmenethez hasonló módon kapjuk, hogy $HF = GF$ és így F is rajta van HG felező merőlegesén. A bizonyítandó állításnál egy kicsit többet is beláttunk, EF merőleges HG-re és felezi is azt.

1 pont

Az ábrán $ABD\angle$ és $BAC\angle$ hegyesszög. Ilyenkor G és H az AB és CD szakaszok belső pontja. Abban az esetben, ha a két szög valamelyike tompaszög, G és H nem lesz belső pontja az AB és CD oldalaknak, de a fent közölt gondolatmenetünk változatlanul működik. Amennyiben az említett két szög közül valamelyik derékszög, például $ABD\angle$, akkor AD Thalesz körén van rajta B és C. Ekkor G és H megegyezik B-vel és C-vel. Ebben az esetben FE a Thalesz kör egy átmérője, ami áthalad GH, azaz a BC húr felezőpontján, ezért éppen a húr felezőmerőlegese.

1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az ac, $bc + ad$, bd mindegyike osztható az n egésszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc+ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n-nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.

Megoldás: A feladat szövege szerint léteznek olyan r, s és t egészek, amelyekre

$$(1)\quad ac = nr, \qquad (2)\quad bc + ad = ns, \qquad (3)\quad bd = nt.$$

Emeljük négyzetre (2) mindkét oldalát, és mindkét oldalon vonjuk ki belőle (1) és (3) megfelelő oldalai szorzatának 4 szeresét:

$$(bc + ad)^2 - 4 \cdot ac \cdot bd = n^2(s^2 - 4rt)$$

A bal oldalon teljes négyzet áll. Osztunk n^2-tel és a következőt kapjuk:

$$(4) \qquad \left(\frac{bc - ad}{n}\right)^2 = s^2 - 4rt.$$

Mivel (4) jobb oldala egész, ezért a bal oldal is, azaz n osztója $bc - ad$-nek, létezik olyan q egész, amelyre:

$$(5) \qquad bc - ad = nq.$$

4 pont

Adjuk össze, illetve vonjuk ki (2) és (5) megfelelő oldalait:

$$(6)\quad 2bc = n(s + q), \qquad (7)\quad 2ad = n(s - q).$$

A most kapott két egyenlet megfelelő oldalainak szorzata ugyanaz, mint (1) és (3) megfelelő oldalai szorzatának 4 szerese:

$$(8) \qquad 4abcd = 4n^2rt = n^2(s^2 - q^2).$$

$s + q$ és $s - q$ azonos paritású, ugyanis összegük $2s$, ami páros. (8) alapján $s^2 - q^2 = 4rt$, tehát $s + q$ és $s - q$ párosak. Ez viszont (6) és (7) alapján azt jelenti, hogy bc és ad külön-külön is oszthatók n-nel. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás: Teljes indukciót alkalmazunk. Kezdő lépés: $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz. A továbbiakban $n > 1$. Indukciós lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n-nél kisebb pozitív egész esetén, ennek segítségével megmutatjuk, hogy n-re is igaz. Legyen n egyik prím osztója p, $n = pn_1$. Mivel $pn_1|ac$ az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy p osztja a-t, $a = pa_1$. 2 pont

Ha p osztja b-t, akkor $b = pb_1$. Ekkor $n_1|a_1c$, $n_1|b_1d$ és $n_1|b_1c + a_1d$. Alkalmazhatjuk az indukciós feltevést n_1-re és az a_1, b_1, c, d számokra: ezek szerint $n_1|b_1c$ és $n_1|a_1d$, amiből viszont következik, hogy $n|bc$ és $n|ad$. 2 pont

Ha p nem osztja b-t, akkor $n|bd$ miatt $p|bd$, tehát p-nek osztania kell d-t, azaz $d = pd_1$. Tudjuk, hogy $p|ad$, továbbá $n|bc + ad$ miatt $p|bc + ad$. Ezért $p|bc$, tehát c osztható p-vel, azaz $c = pc_1$. Ekkor $n_1|ac_1$, $n_1|bc_1 + ad_1$ és $n_1|bd_1$. Most alkalmazhatjuk az indukciós feltevést n_1-re és az a, b, c_1, d_1 számokra: ezek szerint $n_1|bc_1$ és $n_1|ad_1$, amiből viszont következik, hogy $n|bc$ és $n|ad$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3 pont

Összesen: 7 pont