OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2005-2006. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. A nemnegatív egészeken értelmezett $t(n)$ függvényre $t(0) = t(1) = 0$, $t(2) = 1$. Ha $n > 2$, akkor $t(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész, amely nem osztja az n számot. Legyen $T(n) = t(t(t(n)))$. Határozzuk meg S értékét, ha

$$S = T(1) + T(2) + T(3) + ... + T(2005) + T(2006).$$

Megoldás: A függvény definíciója alapján $T(1) = T(2) = 0$. Ha $n > 1$ és páratlan, akkor $t(n) = 2$, és így $T(n) = t(t(2)) = 0$.

Ha $n > 2$ és páros, akkor $t(n)$ értéke egy prímszám pozitív egész kitevős hatványa lehet. Tegyük fel ugyanis ezzel ellentétben, hogy $t(n) = u \cdot v$, ahol $u > 1, v > 1$ és $(u, v) = 1$. Ekkor $t(n)$ definíciója szerint uv nem osztja n-t, de mivel $u < uv$ és $v < uv$, ezért u és v is osztja n-t. Ez lehetetlen, ugyanis ha $(u, v) = 1$, $u|n$ és $v|n$, akkor $uv|n$.

Vizsgáljuk meg, mely n számok esetén lesz $t(n) = 2^k$ alakú. Mivel n páros, $k > 1$. Ezen számoknál $T(n) = t(t(2^k)) = t(3) = 2$. Ha $k = 2$, akkor n osztói 2 és a 3, de a 4 már nem. Ez akkor teljesül, ha n a 6-nak páratlan többese. $2006 = 334 \cdot 6 + 2$, a 334 hattal osztható szám közül éppen a fele, 167 lesz megfelelő. Ha $k = 3$, akkor n osztói 2, 3, 4, 5, 6, 7, de a 8 már nem. Ez akkor teljesül, ha n az említett osztók legkisebb közös többesének, a 420-nak páratlan többese. Ilyen az első 2006 szám között csak kettő van, a 420 és az 1260. Ha $k \geq 4$, akkor n osztója lenne a 2, 3, ..., 15 számok legkisebb közös többszöröse, ami viszont már nagyobb, mint 2006.

Amennyiben $t(n) = p^k$, ahol p páratlan prím, akkor $t(t(n)) = 2$ és ekkor $T(n) = 1$. Most már meghatározhatjuk S értékét. 0-tól különböző tagot akkor kapunk a feladatban szereplő összegben, ha $n > 2$ és páros. Ebből az 1002 számból 167+2=169 esetén $T(n) = 2$, a többi 833 esetben $T(n) = 1$. Tehát $S = 338 + 833 = 1171$.

2. Építünk egy, az A kezdőpontból induló, összesen 2006 darab útszakaszból álló úthálózatot, amely körutat nem tartalmaz. (Ezt úgy értjük, hogy a hálózat bármely pontjából bármely másik pontjába pontosan egy módon juthatunk el egymáshoz csatlakozó útszakaszokon.) Bármely két útszakasznak nincs közös belső pontja és legfeljebb egy végpontjuk közös. Az úthálózat egyik pontjába egy értéktárgyat rejtettünk el. Az A kezdőpontból elindul egy játékos, aki ezt szeretné megtalálni. Minden elágazásnál az onnan induló, még be nem járt útszakaszok közül egyenlő valószínűséggel választja ki, merre menjen tovább. Visszafordulni nem szabad útja során.

Az úthálózatot úgy építettük meg, hogy a legkisebb legyen a valószínűsége annak, hogy a játékos megtalálja az értéktárgyat. Mekkora ez a minimális valószínűség?

Megoldás: A feladatban megadott feltételek alapján tudjuk, hogy A-tól az értéktárgyig pontosan egy út vezet, álljon ez k útszakaszból. Ezek közül az első útszakasz kezdőpontjában

(A-ban) a_1, a második útszakasz kezdőpontjában a_2, ..., a k-adik útszakasz kezdőpontjában a_k lehetőség közül választhatunk. Ekkor az értéktárgy megtalálásának p valószínűsége:

$$p = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_k}$$

Szeretnénk meghatározni p minimumát. Mivel összesen 2006 útszakasz van, ezért $\Sigma = a_1 + a_2 + ... + a_k \leq 2006$. p akkor lesz minimális, ha $\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$ a lehető legnagyobb. Mostantól csak azt figyeljük, hogyan lehet néhány pozitív egész Π szorzata legnagyobb, ha Σ összegük legfeljebb 2006.

Ha $\Sigma < 2006$, akkor Π-t növeljük, ha valamely szám értékét $2006 - \Sigma$-val megnöveljük. Ha van a számok között 1, pl. $a_j = 1$, akkor rajta kívül van még más a_r szám is. Ekkor a_j-t megszüntetjük és a_r értékét 1-gyel megnöveljük. Ez jó, hiszen $1 \cdot a_r < 1 + a_r$. Ilyen lépésekkel elérjük, hogy minden szám legalább 2. Ha az egyik a_i számunk 3-nál nagyobb, akkor azt kicseréljük két számra, 2-re és $a_i - 2$-re. Ez jó, hiszen $a_i > 3$ esetén $a_i \leq 2 \cdot (a_i - 2)$. Ilyen lépésekkel elérjük, hogy minden szám legfeljebb 3.

Ezek szerint minden számunk 2, vagy 3. Három darab 2-est érdemes beváltani két hármasra, hiszen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 < 9 = 3 \cdot 3$. Mivel a 2006 3-as maradéka 2, a legnagyobb szorzatot akkor kapjuk, ha minden szám 3-as és mellettük van még 1 darab 2-es. A keresett minimális valószínűség tehát $p = (3^{668} \cdot 2)^{-1}$.

A megoldásból leolvasható, hogy van is olyan úthálózat, amely esetén a megtalálás valószínűsége ennyi, pl. ha $k = 669$, $a_1 = a_2 = ... = a_{668} = 3$ és $a_{669} = 2$.

3. Adott a síkon egy K középpontú egységsugarú kör és egy ezt nem metsző e egyenes. K-ból az e egyenesre emelt merőleges talppontja O, $KO = 2$. Legyen H azoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek a középpontja e-n van és kívülről érintik a K középpontú egységkört.

Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan P pont, amelyből H minden körének e-n levő átmérője ugyanakkora (0°-nál nagyobb) szögben látszik. Határozzuk meg P helyzetét és a látószög mértékét.

Megoldás: Legyen a keresett látószög φ. Helyezzük el az alakzatot ábránknak megfelelően egy koordinátarendszerbe (1.ábra); mivel az alakzatnak KO szimmetriatengelye, P-nek ezen kell lennie. Legyen ugyanis l H-nak egy köre, l tükörképe KO-ra l'. Ekkor l' szintén H-ban van. A feladat feltételei szerint P rajta van l és l' φ szögű látókörén is, ezeknek csak KO-n lehet közös pontja.

Legyen egy érintőkör középpontja $C(c, 0)$, sugara r, $r \neq c$, P koordinátái $P(0, p)$, $p > 0$. Írjuk fel Pitagorasz tételét a KOC háromszögre:

$$c^2 + 4 = (r + 1)^2. \tag{1}$$

A C középpontú kör e-n levő átmérőjének végpontjai $A(c - r, 0)$, $B(c + r, 0)$. Legyenek a PA illetve PB egyenesek irányszögei α és β, $APB\angle = \varphi$; nyilván $\varphi = \beta - \alpha$. Az iránytangensek és a látószög tangense $t = \text{tg}\varphi$ jelöléssel:

$$\text{tg}\alpha = \frac{p}{r - c}, \qquad \text{tg}\beta = \frac{-p}{r + c},$$

(2) $$t = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{-\frac{p}{r+c} - \frac{p}{r-c}}{1 - \frac{p^2}{r^2-c^2}} = \frac{-2rp}{r^2 - c^2 - p^2}$$

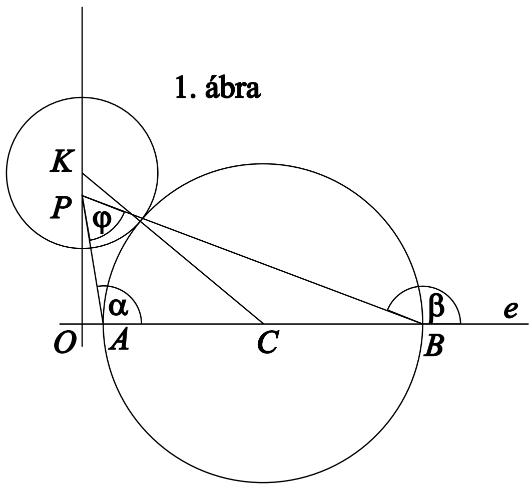
Az (1)-es összefüggést átrendezve kapjuk, hogy $r^2 - c^2 = 3 - 2r$. Ezt írjuk be (2) utolsó törtjének nevezőjébe:

(3) $$t = \frac{-2rp}{r^2 - c^2 - p^2} = \frac{-2rp}{3 - 2r - p^2}.$$

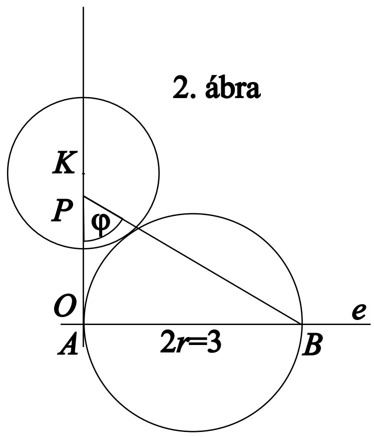
A (3)-ban kapott összefüggést átalakítva a következőt kapjuk:

$$(2p - 2t)r = tp^2 - 3t.$$

Ez viszont végtelen sok r-re csak akkor teljesülhet, ha $p = t$, és így $t^3 - 3t = 0$, $\mathrm{tg}\varphi = t = p = \sqrt{3}$, $\varphi = 60°$. A kapott P pont valóban megfelel, mivel a gondolatmenet megfordítható, az egyetlen kérdéses helyzetet külön ábrázoltuk (2. ábra). Ekkor $A = O$, $c = r$, azaz (1) alapján $2r = 3$. A 2. ábráról leolvasható, hogy az eredményül kapott P $c = r$ esetén is megfelel. Természetesen P-nek az e-re vontakozó tükörképe is kielégíti a feladatot, hiszen H szimmetrikus e-re.



1. ábra



2. ábra