Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2006-2007. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összeggel megadott N szám nem prím:

$$N = \left(\sum_{n=1}^{2006} n^n\right) + 2006^{2007}, \quad \text{azaz} \quad N = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2006^{2007}.$$

Megoldás: Igazolni szeretnénk, hogy N nem prím, ehhez elegendő megtalálni valamelyik valódi osztóját. N 2-vel nem osztható, hiszen 1004 páros és 1003 páratlan szám összege, tehát páratlan. 1 pont

Nézzük meg 3-mal osztható-e. Az összeg általános tagja n^n alakú. Ha n hárommal osztható, akkor n^n is. Ha összeszorzunk két számot, amelyek hármas maradékai m_1 és m_2, akkor a szorzatuk hármas maradéka m_1m_2 hármas maradéka lesz, hiszen

$$(3k + m_1)(3l + m_2) = 3(3kl + m_1 + m_2) + m_1m_2.$$

Ez alapján ha n hármas maradéka 1, akkor minden pozitív egész kitevős hatványa 1 maradékot ad. Ha n hármas maradéka 2, akkor $3k - 1$ alakban írható. A maradék számításához egyszerűbb, ha azt -1-nek gondoljuk. Ekkor a kitevő paritásán múlik n^n hármas maradéka: ha n páros 1, ha n páratlan -1 lesz a hármas maradék. 2 pont

A 2007 tag közül 668-nak alapja $3k$ alakú, ezek összege 3-mal osztható. 669 esetben lesz az alap $3k + 1$ alakú, ezek összege 669 maradékot ad, ami szintén 3-mal osztható. 2 pont

670 esetben lesz az alap $3k - 1$ alakú. Az első 669-nél ezek n^n típusúak, a kitevők felváltva párosak illetve páratlanok, így felváltva adnak 1 és -1 maradékot, összesen 1-et. Az utolsó tag, a 2006^{2007} alapja is $3k - 1$ alakú, kitevője páratlan, így hármas maradéka -1. Ezek szerint a most vizsgált 670 tag összege is 3-mal osztható. Tehát N 3-nál nagyobb, 3-mal osztható szám, azaz nem prím. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $0 \le x \le 2\pi$, és $0 \le y \le 2\pi$:

$$\cos x + \cos y = 1, \tag{1}$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{3}{4}. \tag{2}$$

Megoldás: (1)-ből következik, hogy $\cos x$ és $\cos y$ negatív nem lehet, mert a koszinusz 1-nél nagyobb nem lehet. $\cos x$ illetve $\cos y$ 0 sem lehet, mert ha pl. $\cos x$=0, akkor $\cos y$=1 és $\sin y$=0, így (2) nem teljesül. 1 pont

Tehát $\cos x > 0$ és $\cos y > 0$, így x és y az 1. vagy 4. negyedbe esik. Mivel (2) szerint szinuszaik előjele különbözik, ezért ha az x az 1. negyedben van, akkor y a negyedikben, vagy fordítva. Ez a vizsgálat a végén segítségünkre lesz a gyökök áttekintésénél. 1 pont

Legyen $\cos x = u$, $\cos y = v$. A (2) egyenlet két oldalát négyzetreemelve az egyenletrendszer így alakul át:

$$(3) \qquad u + v = 1, \qquad (4) \qquad (1 - u^2)(1 - v^2) = \frac{9}{16}.$$

Átalakítjuk (4)-et:

$$u^2v^2 - (u^2 + v^2) + 1 = u^2v^2 - \Big((u + v)^2 - 2uv\Big) + 1 = \frac{9}{16}.$$

Mivel $u + v = 1$ ez uv-re egy másodfokú egyenlet:

$$u^2v^2 + 2uv - \frac{9}{16} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad uv = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}}}{2} = \frac{-2 \pm \frac{5}{2}}{2}.$$

2 pont

Mivel $uv = \cos x \cos y > 0$, ezért $uv = \cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Ebbe az egyenletbe $\cos y$ helyébe írjuk (1) alapán a $\cos y = (1 - \cos x)$-et, majd átrendezzük:

$$\cos x(1 - \cos x) = \frac{1}{4}, \qquad \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

A megoldás tehát a $\cos x = \cos y = \frac{1}{2}$. 2 pont

Figyelembe véve a megoldás elején leírtakat:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad y_1 = \frac{5\pi}{3}, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3}, \quad y_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Ezek valóban kielégítik az eredeti egyenletrenszert. 1 pont

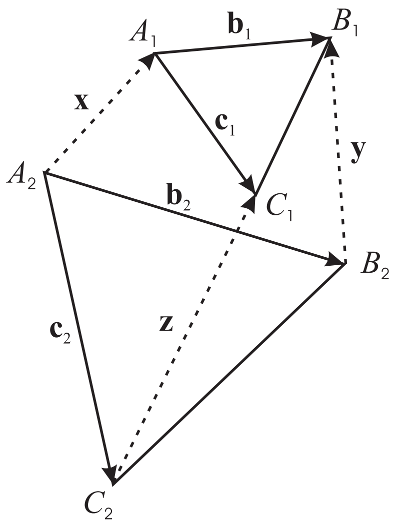
Összesen: 7 pont

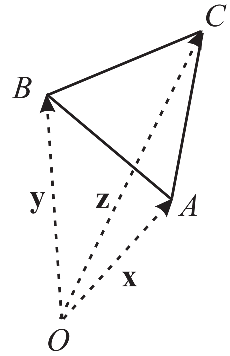
3. Legyenek az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ azonos körüljárású szabályos háromszögek. A sík egy tetszőleges O pontjából mérjük fel a következő vektorokat:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_2A_1}, \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B_2B_1}, \qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{C_2C_1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög szabályos.

Megoldás: Bizonyításunk során az ábra jelöléseit használjuk. A feladat szerint a $\mathbf{c}_1$ vektort a $\mathbf{b}_1$ vektorba, illetve a $\mathbf{c}_2$ vektort a $\mathbf{b}_2$ vektorba A_1 illetve A_2 körüli $60°$-os elforgatás viszi át. Azt kell bizonyítanunk, hogy az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ vektorba ugyancsak $60°$-os elforgatás viszi. 2 pont





Az $A_2A_1B_1B_2$ négyszögből $\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 - \mathbf{y} - \mathbf{b}_2 = 0$, az $A_2A_1C_1C_2$ négyszögből pedig $\mathbf{x} + \mathbf{c}_1 - \mathbf{z} - \mathbf{c}_2 = 0$, ezekből:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{z} - \mathbf{x} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \qquad \overrightarrow{AB} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2.$$

Mivel $\mathbf{c}_1$-et $\mathbf{b}_1$-be és $\mathbf{c}_2$-t $\mathbf{b}_2$-be $60°$-os elforgatás viszi, ugyanez áll különbségükre is, amivel állításunkat bebizonyítottuk. 5 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy szabályos 21 oldalú sokszög csúcsait megszámoztuk sorban a 0, 1, 2, 3, ..., 20 számokkal. Egy urnába betettünk 21 lapot, ezeken is a 0, 1, 2, 3, ..., 20 számok voltak. Az urnából kihúzunk három lapot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a lapokon szereplő számoknak megfelelő három csúcs hegyesszögű háromszöget alkot?

Megoldás: A kiválasztható háromszögek száma $\binom{21}{3} = 1330$. 1 pont

Derékszögű nincs köztük, hiszen a 21 páratlan, tehát nincs két csúcs, amelyek által meghatározott húr a sokszög köré írt körnek átmérője lenne. Derékszögű háromszög esetén azonban lenne átmérő, a Thalesz tétel alapján. 1 pont

Elegendő tehát a háromszögek közül a tompaszögűeket kiválasztani. Tompaszögű a háromszög, ha nem tartalmazza a köré írt kör középpontját. Legyenek a sokszög csúcsai $A_0, A_1, A_2, ..., A_{20}$. Megszámoljuk azokat a tompaszögű háromszögeket, amelyeknek a leghosszabb oldalának egyik végpontja A_0. Tekintsük először az $A_0, A_1, ..., A_{10}$ csúcsokat, ezek egy félkörön vannak. Ha a leghosszabb oldal másik végpontja A_i, $1 < i < 11$, akkor a vele szemközti tompaszögű csúcs lehet A_k, $0 < k < i$. Megszámoljuk ezeket, sorra véve az A_0A_i oldalakat:

$$A_0A_2 : 1, \quad A_0A_3 : 2, \quad ..., \quad A_0A_{10} : 9; \quad \text{tehát összesen} \quad 1 + 2 + ... + 9 = 45.$$

Az A_0-on áthaladó szimmetria tengelyre tükrösen is ugyanennyi van, összesen 90. Mivel a sokszögnek egyetlen csúcsa sincs kitüntetett helyzetben, ezért minden csúcsra ugyanezt az értéket kapjuk. Összegezve $21 \cdot 90$ adódik. Mivel a leghosszabb oldalnak két végpontja van, ezért így a tompaszögű háromszögek számának kétszeresét kaptuk. A hegyesszögűek száma tehát: $1330 - (21 \cdot 45) = 385$, a keresett valószínűség

$$\frac{385}{1330} = \frac{11}{38} \approx 0,29.$$

5 pont

Megjegyzés: A fenti módszert alkalmazva azt kapjuk, hogy a szabályos $2n + 1$ szög esetén a hegyesszögű háromszögek száma

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

azaz az első n négyzetszám összege. A valószínűség pedig $\frac{n+1}{4n-2}$. Ez már viszonylag kis csúcsszámnál is jól közelíti az $\frac{1}{4}$-et.

Összesen: 7 pont