Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2006–2007-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket az ottani 5. pont utolsó mondatára, mely szerint minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 15 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül a versenybizottságnak**: OKTV Matematika III., OKÉV, 1363 Budapest, Pf. 19. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy továbbra is érvényes a versenyszabályzatnak az Oktatási Minisztérium által történt szigorú módosítása, és így a Versenybizottság legfeljebb 30 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban a feladatoknak általában csak egy megoldását közöljük; más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2006. november — A versenybizottság

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c pozitív egészre $(a,b)(a,c)[b,c]$ osztója abc-nek. (A szokásos módon (x,y), illetve $[x,y]$ az x és y legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét jelöli.)

Első megoldás: Azt kell megmutatni, hogy $M=(a,b)(a,c)[b,c]$ törzstényezős felbontásában bármely prím kitevője legfeljebb akkora, mint abc törzstényezős felbontásában. (1 pont)

Legyen egy p prím kitevője a, b, ill. c felbontásában α, β, ill. γ (ha valamelyik szám nem osztható p-vel, akkor a megfelelő kitevő 0). Ekkor p kitevője abc felbontásában $\alpha+\beta+\gamma$, az M felbontásában pedig $\min(\alpha,\beta)+\min(\alpha,\gamma)+\max(\beta,\gamma)$. (2 pont)

Mivel b és c szerepe szimmetrikus, ezért feltehetjük, hogy $\beta\le\gamma$. Így három esetet kell megvizsgálnunk: $\alpha\le\beta$; $\beta\le\alpha\le\gamma$; ill. $\gamma\le\alpha$. Az egyes esetekben p kitevője M-ben $2\alpha+\gamma$; $\beta+\alpha+\gamma$; ill. $\beta+2\gamma$, ami (az aktuális feltételek miatt) valóban mindig legfeljebb $\alpha+\beta+\gamma$. (4 pont)

Második megoldás: A $bc=[b,c](b,c)$ összefüggést beírva, a $[b,c]$-vel való „egyszerűsítés” után az eredetivel ekvivalens $(a,b)(a,c)\mid a(b,c)$ oszthatóságra jutunk. (2 pont)

Az $(xy,xz)=x(y,z)$ azonosság többszöri alkalmazásával ez az $(a^2,ac,ab,bc)\mid(ab,ac)$ oszthatósággá alakítható át. (3 pont)

Ez pedig valóban fennáll: mivel a bal oldal (többek között) ab-nek és ac-nek is közös osztója, ezért szükségképpen osztója ab és ac lnko-jának, azaz a jobb oldalnak. (2 pont)

Harmadik megoldás: A második megoldás első lépésével a feladatot átfogalmazzuk az $(a,b)(a,c) \mid a(b,c)$ oszthatóságra. (2 pont)

Az $xy = (x,y)[x,y]$ azonosságot $x = (a,b)$-ra és $y = (a,c)$-ra alkalmazva a bal oldal átírható az $\big((a,b),(a,c)\big)\big[(a,b),(a,c)\big]$ alakra. (2 pont)

Itt az első tényező (a,b,c), ami osztója a jobb oldal második tényezőjének. A bal oldal másik tényezője pedig osztója a jobb oldal első tényezőjének, a-nak, hiszen a közös többszöröse (a,b)-nek és (a,c)-nek. Ezért a bal oldali két tényező szorzata osztója a jobb oldalon álló két tényező szorzatának. (3 pont)

2. feladat

Adott N és k pozitív egészekre megszámoltuk, hogy az N számot hányféleképpen lehet felírni $a+b+c$ alakban, ahol $1 \le a,b,c \le k$, és az összeadandók sorrendje is számít. Kaphattunk-e eredményül 2006-ot?

Megoldás: Tegyük egy-egy csoportba azokat az előállításokat, amelyek csak az összeadandók sorrendjében térnek el. Ha az itt szereplő tagok mind különbözők, akkor a csoportban 6 előállítás szerepel, ha a tagok között két egyforma van, de a harmadik ettől különbözik, akkor a csoportban 3 előállítás található, és végül ha mindhárom tag ugyanaz, akkor ez az előállítás egyedül alkot egy csoportot. (3 pont)

A fentiek alapján az előállítások száma $6k + 3m + 1$ vagy $6k + 3m$ (ahol k, ill. m a hatos, ill. hármas csoportok számát jelöli), attól függően, hogy a csupa azonos tagból való előállítás megvalósul-e (ez pontosan akkor jön létre, ha $3 \mid N$ és $k \ge N/3$). (2 pont)

Így az előállítások száma 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad. Mivel a 2006 hármas maradéka 2, ezért az előállításszám nem lehet 2006. (2 pont)

3. feladat

Bálint 200 forintot fizet Annának, ha a (90-ből 5-ös) lottón a kihúzott számok szorzatának utolsó számjegye 0 lesz (tízes számrendszerben), viszont Anna fizet Bálintnak 300 forintot, ha nem ez a helyzet. Hosszabb távon kinek előnyös ez a megállapodás?

Megoldás: Bálintnak akkor előnyös a játék, ha a nyerési esélye nagyobb, mint
$200/(200+300) = 0{,}4$. (1 pont)

Bálint akkor nyer, ha a kihúzott számok mindegyike páratlan, vagy ha nincs köztük 5-tel osztható (beleértve azt is, hogy ez a két feltétel egyszerre teljesül). (1 pont)

Ha mind az öt szám páratlan, akkor ezeket az 1 és 90 közötti 45 darab páratlan számokból húzták, ezen lehetőségek száma $\binom{45}{5}$. (1 pont)

Ugyanígy, ha egyik sem osztható 5-tel, akkor valamennyien a $90 - 18 = 72$ darab 1 és 90 közötti, 5-tel nem osztható számok közül kerülnek ki, ezen lehetőségek száma tehát $\binom{72}{5}$. (1 pont)

Így a Bálint számára kedvező esetek száma $\binom{45}{5} + \binom{72}{5} - \binom{36}{5}$, hiszen duplán számoltuk azokat az eseteket, amikor a számok sem 2-vel, sem 5-tel nem oszthatók. (1 pont)

Így Bálint nyerési esélye

$$\frac{\binom{45}{5}+\binom{72}{5}-\binom{36}{5}}{\binom{90}{5}} < \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}+\frac{72\cdot 71\cdot 70\cdot 69\cdot 68}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} <$$

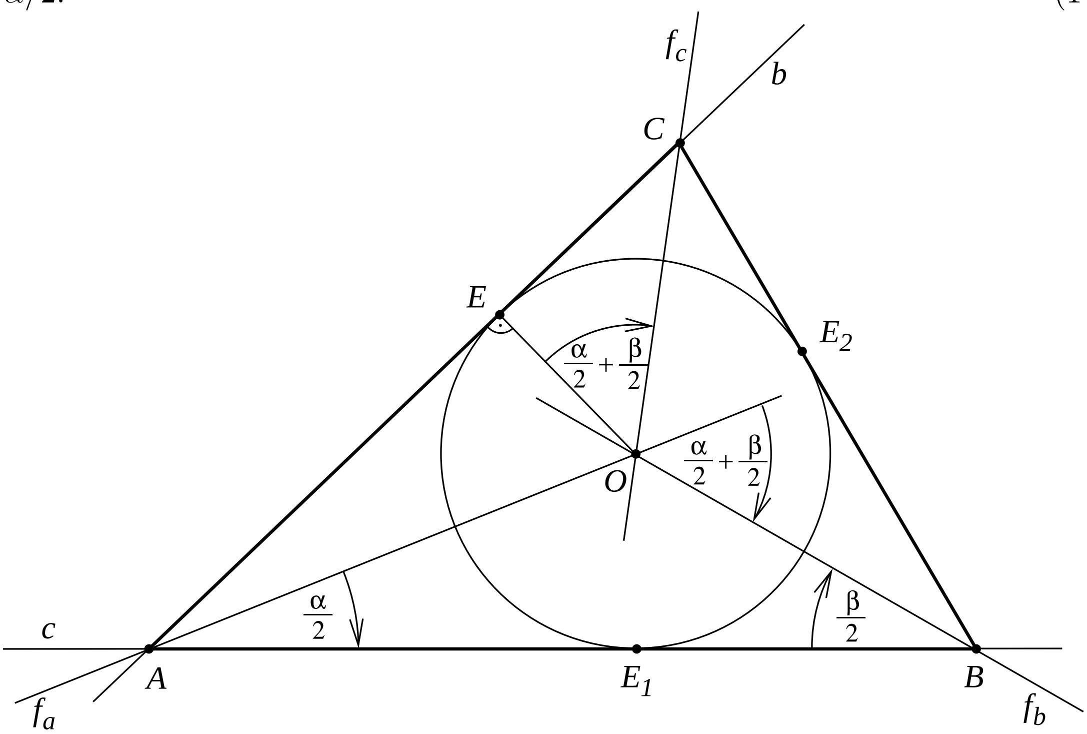
$$< \left(\frac{45}{90}\right)^5+\left(\frac{72}{90}\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{1024}{3125}<0{,}4\,;$$

tehát a játék Annának előnyös. (2 pont)

4. feladat

Az ABC háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az A, B, illetve C csúcsnál rendre α, β és γ. A B csúcsot az A pont körül negatív irányban elforgatjuk α szöggel, majd az így kapott B_1 pontot a B pont körül negatív irányban elforgatjuk β szöggel, és végül az így nyert B_2 pontot a C pont körül negatív irányban γ szöggel elforgatva a B_3 pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a B, B_3 pontok és az ABC háromszög beírt körének O középpontja.

Első megoldás: Egy α szögű forgatás helyettesíthető a középponton átmenő két egyenesre történő tengelyes tükrözés (megfelelő sorrendben vett) egymásutánjával, ahol a tengelyek szöge $\alpha/2$. (1 pont)



Így a feladatban szereplő A pont körüli forgatás felbontható az f_a szögfelezőre, majd a c oldalegyenesre való tükrözés egymásutánjára. Hasonlóan a B pont körüli forgatást a c oldalegyenesre és az f_b szögfelezőre való tükrözéssel állítjuk elő. Így a két forgatás szorzata az f_a és f_b szögfelezőkre való tükrözéssel helyettesíthető, hiszen a c oldalegyenesre való kétszeri tükrözés egymást semlegesíti. A szögfelezők szöge $\alpha/2 + \beta/2$, tehát a két forgatás egymás utáni alkalmazása a beírt kör középpontja körüli $\alpha + \beta$ szögű negatív irányú forgatással egyenlő. (2 pont)

A beírt kör a b oldalt az E pontban érinti. Az EO sugár és az f_c szögfelező szöge is $\alpha/2 + \beta/2$, ezért az előbbi forgatás az EO egyenesre és az f_c szögfelezőre való tükrözések egymás utáni alkalmazásával is előállítható. Bontsuk fel a C pont körüli γ szögű negatív irányú forgatást az f_c szögfelezőre, majd a b oldalegyenesre való tükrözések egymásutánjára. Így a három forgatás az EO egyenesre és a b egyenesre való tükrözésekkel helyettesíthető. Ezek egymásra merőleges egyenesek, tehát a három egymást követő forgatás olyan középpontos tükrözéssel egyenértékű, amelynek a középpontja E. (2 pont)

Szerkesszük meg a B és B_3 pontok felezőpontját, ezzel megkapjuk az E pontot. Az O pont körül, EO sugárral megrajzoljuk a beírt kört. A körhöz az E pontban érintőt szerkesztünk, ezzel a háromszög b oldalegyenesét kapjuk meg. A B pontból érintőket szerkesztünk a körhöz, ezzel megkapjuk az a és c oldalegyeneseket. Ez az eljárás nyilván az eredeti ABC háromszöghöz vezet, amely a feladat egyetlen megoldása. (2 pont)

Második megoldás: Az előző megoldáshoz hasonlóan belátható, hogy különböző középpontú, α és β szögű elforgatások egymásutánja $\alpha + \beta$ szögű forgatás (alkalmas középpont körül), ha $\alpha + \beta \neq k \cdot 360°$. (2 pont)

Így a három egymás utáni elforgatás $\alpha + \beta + \gamma = 180°$-os elforgatásnak, tehát középpontos tükrözésnek felel meg. (1 pont)

Az E érintési pontot az A pont körül α szöggel negatív irányban elforgatva az E_1 érintési pontot kapjuk. Ha az E_1-et a B pont körül β szöggel negatív irányban elforgatjuk, akkor az E_2 pontba jutunk. A C pont körüli γ szögű negatív irányú forgatásnál ennek a képe az E pont. Tehát E a transzformációnak fixpontja, ebből adódóan az E pont lesz a tükrözés középpontja. (2 pont)

A szerkesztés a továbbiakban azonos az első megoldásban leírtakkal. (2 pont)

5. feladat

Töltsük ki a teret páronként kitérő egyenesekkel.

Megoldás: Használjuk a térbeli derékszögű x, y, z koordinátákat. Az xy koordinátasík mindegyik $A = (x, y, 0)$ pontjához tekintsük a $z = 1$ síknak azt az A' pontját, amely A-nak a z tengely körüli pozitív $90°$-os elforgatásával és z-irányú eltolásával keletkezik, azaz az $A' = (-y, x, 1)$ pontot. Azt állítjuk, hogy az így nyert AA' egyenesek páronként kitérők és együtt kitöltik a teret. (2 pont)

Ha B az xy koordinátasíknak A-tól különböző tetszőleges pontja, akkor az AB egyenest $90°$-os elforgatás és eltolás viszi az $A'B'$ egyenesbe. Emiatt AB és $A'B'$ kitérő egyenesek, hiszen egyrészt az egymástól diszjunkt $z = 0$ és $z = 1$ síkokban fekszenek, másrészt irányaik merőlegesek. Így tehát az A, B, A' és B' pontok nincsenek egy síkban. Ekkor viszont AA' és BB' is szükségképpen kitérő egyenesek. (2 pont)

Legyen most $P = (a, b, c)$ a tér tetszőleges pontja. Megmutatjuk, hogy található olyan $A = (x, y, 0)$ pont, hogy P illeszkedik az AA' egyenesre. Ez pontosan akkor teljesül, ha az

A pontból az $\overrightarrow{AA'}$ vektor alkalmas számszorosa éppen P-be mutat, azaz ha az

$$(x, y, 0) + t \cdot (-y - x, x - y, 1) = (a, b, c)$$

egyenletrendszernek létezik (rögzített a, b, c mellett az x, y, t változókban) megoldása. A harmadik koordinátára vonatkozó egyenletből nyilván $t = c$, ezt behelyettesítve és átrendezve az

$$\begin{aligned} (1-c)x - cy &= a \\ cx + (1-c)y &= b \end{aligned}$$

kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a két egyenlet (tetszőleges c esetén) független, ezért mindig létezik megoldás. (3 pont)

Megjegyzések. (1) A feladat megoldásához nem szükséges a szóban forgó x- és y-értékeknek a tényleges meghatározása, de a teljesség kedvéért közöljük az egyenletrendszer megoldását:

$$x = \frac{a - ac + bc}{2c^2 - 2c + 1}, \quad y = \frac{b - ac - bc}{2c^2 - 2c + 1}.$$

(2) Az A' pont származtatásához nem lényeges, hogy éppen 90°-os forgatást használjunk, tetszőleges olyan szög alkalmas, amely 180°-nak nem többszöröse. A derékszögű forgatás megkönnyíti a koordinátás felírást.

(3) Annak az igazolása, hogy a megoldásban definiált egyeneshalmaz valóban kitölti a teret, az alábbi „számolásmentes” módon is történhet. Vegyük először észre, hogy a szóban forgó egyeneshalmaz zárt egyrészt a z tengely körüli (tetszőleges szögű) elforgatásokra, másrészt bármely $\lambda > 0$ mellett az

$$(x, y, z) \mapsto (\lambda x, \lambda y, z)$$

formulával megadható térbeli affin transzformációkra nézve. (Valóban, elegendő magára az A pontra alkalmazni ezeket a transzformációkat, ekkor A' is és így az egész AA' egyenes is ugyanúgy transzformálódik.) Az xy koordinátasíkkal párhuzamos bármelyik síkra szorítkozva ezek a transzformációk az origó körüli összes elforgatást és az origó középű összes nyújtást (ill. zsugorítást) eredményezik. Emiatt ha egy ilyen síkban akár csak egyetlen, az origójától különböző pontot találunk, amelyet a vizsgált egyeneshalmaz lefed, akkor a lefedett pontok szükségképpen az egész síkot belepik. Elég tehát annyit megjegyezni, hogy ha A-t az xy-sík origójának választjuk, akkor az AA' egyenes a z-tengellyel esik egybe, ha pedig egy tetszőleges, origótól különböző pontot tekintünk (például konkrétan az $A = (1, 0, 0)$ pontot), akkor az AA' egyenes mindegyik, az xy-síkkal párhuzamos síkot annak valamely nem a z-tengelyen lévő pontjában döfi (a konkrét példában a $z = c$ síkot az $(1 - c, c, c)$ pontban).