GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007-2008. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\log_2(1+\cos(2x)) = 2^{1+\cos(3x)}. \tag{1}$$

Megoldás: Mivel $\cos(2x) \le 1$, ezért

$$\log_2(1+\cos(2x)) \le \log_2 2 = 1.$$ 1 pont

Mivel $\cos(3x) \ge -1$, ezért

$$2^{1+\cos(3x)} \ge 2^0 = 1.$$ 1 pont

Ezek szerint (1) csak akkor teljesülhet, ha a bal és jobb oldala egyaránt 1. 1 pont

A bal oldal pont akkor lesz 1, ha $\cos(2x) = 1$, ennek megoldása $2x = 2k\pi$, azaz

$$x = k\pi. \quad (k \in \mathrm{Z}) \tag{2}$$

1 pont

A jobb oldal pont akkor lesz 1, ha $\cos(3x) = -1$, ennek megoldása $3x = (2l+1)\pi$, azaz

$$x = \frac{2l+1}{3}\pi. \quad (l \in \mathrm{Z}) \tag{3}$$

1 pont

A feladatban kitűzött egyenlet megoldásait kapjuk, ha x a (2) és (3) feltételeknek is megfelel, azaz $x = (2n+1)\pi$ $(n \in \mathrm{Z})$. 2 pont

Összesen: 7 pont

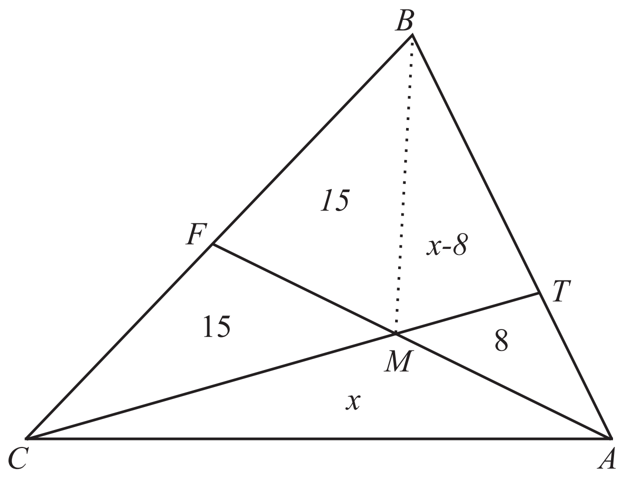
2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?

Megoldás: Jelölje az AMC háromszög területét x. Mivel F oldalfelező pont, ezért igaz a következő két dolog:

(1) az ACF és AFB háromszögek területe ugyanakkora, így a $BTMF$ négyszög területe $x+7$; 1 pont

(2) az MCF és MFB háromszögek területe ugyanakkora, mindkettő 15 egység. 1 pont

Ezen két észrevételből az következik, hogy az MBT háromszög területe $T_{MBT} = T_{BTMF} - T_{MFB} = (x-8)$ egység. 1 pont



Mivel az AB egyeneshez tartozó magassága az MBT és MTA, valamint a CBT és CTA háromszögeknek azonos, ezért területeik aránya éppen a BT és TA szakaszok arányával egyezik meg, azaz:

$$\frac{T_{MBT}}{T_{MTA}} = \frac{T_{CBT}}{T_{CTA}} = \frac{BT}{TA}.$$ 2 pont

Írjuk fel ezt az arányt a korábbi észrevételeink alapján:

$$\frac{x-8}{8} = \frac{(x+7)+15}{8+x}.$$

A nevezőkkel szorozva és 0-ra rendezve $x^2 - 8x - 240 = 0$ adódik, amelynek megoldásai $x_1 = 20$ és $x_2 = -12$, ez utóbbi nem lehet egy háromszög területe.

Az ABC háromszög területe $T_{ABC} = 2x + 30 = 70$ egység. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

1. megoldás: A nevezőkben nem állhat 0, ezért $a \neq 1$ és $b \neq -1$. 1 pont

A nevezőkkel szorozva:

$$b^2 + b + a^2 - 5a + 4 = ab + a - b - 1. \tag{1}$$

Tekintsük úgy (1)-et, mint b-re nézve másodfokú egyenletet. Egy oldalra rendezve:

$$b^2 + (2-a)b + (a^2 - 6a + 5) = 0.$$

2 pont

Ezen egyenletnek akkor lehetnek valós megoldásai, ha diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$4 - 4a + a^2 - 4a^2 + 24a - 20 = -3a^2 + 20a - 16 \geq 0.$$

Ebből

$$\frac{10 - \sqrt{52}}{3} \leq a \leq \frac{10 + \sqrt{52}}{3}.$$

Mivel a egész szám, és $0 < \frac{10-\sqrt{52}}{3}$ és $\frac{10+\sqrt{52}}{3} < 6$, ezért a lehetséges értékei 2, 3, 4 és 5.

3 pont

Ezeket az értékeket (1)-be helyettesítjük. Ha $a = 2$, akkor $b^2 - 3 = 0$, ennek gyökei nem egészek. Ha $a = 3$, akkor $b^2 - b - 4 = 0$, ennek sincs egész megoldása. Ha $a = 4$, akkor $b^2 - 2b - 3$, ennek egészek a gyökei, $b = 3$ jó megoldás, $b = -1$ a kezdeti kikötés miatt nem megoldás. Ha $a = 5$, akkor $b^2 - 3b = 0$, ennek az egyenletnek mindkét gyöke jó, ezek a 0 és a 3. 1 pont

A megfelelő $(a; b)$ megoldások: (4;3), (5;0) és (5;3).

Összesen: 7 pont

2. megoldás: A nevezőkben nem állhat 0, ezért $a \neq 1$ és $b \neq -1$. 1 pont

A nevezőkkel szorozva kapjuk (1)-et, majd ezt 2-vel szorozzuk:

$$2b^2 + 2b + 2a^2 - 10a + 8 = 2ab + 2a - 2b - 2.$$

Átrendezzük és teljes négyzeteket alakítunk ki:

$$b^2 + 4b + 4 + b^2 - 2ab + a^2 + a^2 - 12a + 36 = 30$$

$$(b + 2)^2 + (b - a)^2 + (a - 6)^2 = 30 \tag{2}$$

3 pont

A 30-at három négyzetszám összegeként a 0, 1, 4, 9, 16, 25 számok segítségével csak 1+4+25 alakban írhatjuk fel.

Ha $(b + 2)^2 = 1$, akkor b lehet -3 vagy -1, ez utóbbit a kikötés kizárja. Ha $(b + 2)^2 = 4$, akkor b lehet -4 vagy 0. Ha $(b + 2)^2 = 25$, akkor b lehet -7 vagy 3.

Megkaptuk az összes szóba jöhető b értéket, ezeket (1)-be helyettesítve, majd az a-ra kapott másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk az első megoldásban közölt eredményeket.

3 pont

Összesen: 7 pont.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy olyan téglalap alapú gúlában, amelyben a gúla magasságának a talppontja az alap valamely csúcsába esik, a leghosszabb oldalél hosszának negyedik hatványa legalább hatszorosa az oldallapok területei négyzetösszegének.

Megoldás: Legyen a gúla alapja az $ABCD$ téglalap, a gúla ötödik csúcsa E, ahol EA merőleges az alapra. Legyen $AB = a$, $AD = b$ és $AE = c$. A leghosszabb oldalél EC. Az ABC és EAC derékszögű háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz tételt:

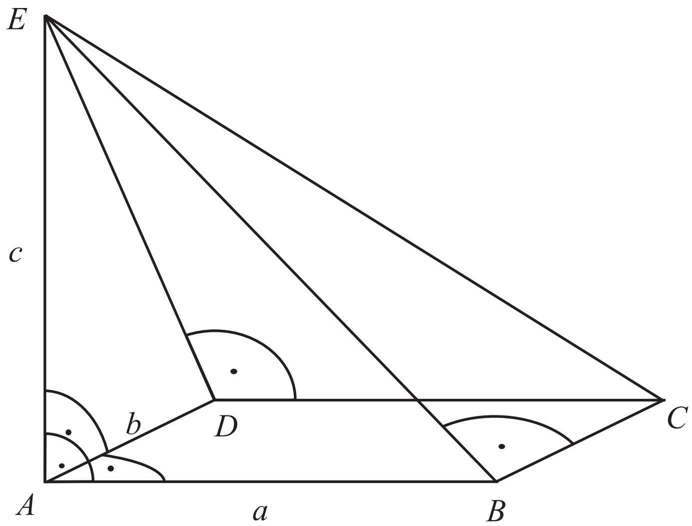
$$AC^2 = a^2 + b^2 \qquad AC^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = EC^2.$$ 1 pont

Az EAB és EAD derékszögű háromszögek területe:

$$T_{EAB} = \frac{ac}{2} \qquad T_{EAD} = \frac{bc}{2}.$$ 1 pont

Mivel EA merőleges az alapra, ezért annak minden egyenesére, így BC-re is. BC merőleges EA-ra és AB-re, ezért az EAB síkra, így a benne fekvő EB egyenesre is. Ezek szerint EBC is derékszögű háromszög. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy ECD is derékszögű háromszög, ezek területe:

$$T_{EBC} = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{2} \qquad T_{EDC} = \frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{2}.$$ 1 pont



Ezek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 6\left(\frac{a^2c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{b^2a^2+b^2c^2}{4} + \frac{a^2b^2+a^2c^2}{4}\right).$$ 1 pont

A bal oldalt kifejtjük, a jobb oldalt átalakítjuk:

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 \geq 3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget és szorozzuk meg 2-vel:

$$2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \geq 0.$$

A bal oldalon teljes négyzeteket hozunk létre:

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geq 0,$$

ez pedig az a, b, c valós számok minden értéke esetén teljesül. 2 pont

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenséget beláttuk. 1 pont

Összesen: 7 pont.

5. Adott az

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{2} - \sqrt{x^2+x}$$

függvény, ahol $x \geq 0$.

(a) Monoton nő, vagy csökken a függvény?

(b) Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre $f(n) < \dfrac{1}{2008}$?

1. megoldás: (a) Megmutatjuk, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő, azaz ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$. Ez azt jelenti, hogy

$$x_1 + \frac{1}{2} - \sqrt{{x_1}^2 + x_1} > x_2 + \frac{1}{2} - \sqrt{{x_2}^2 + x_2}, \tag{1}$$

ami ekvivalens a következővel:

$$\sqrt{{x_2}^2 + x_2} - \sqrt{{x_1}^2 + x_1} > x_2 - x_1.$$

1 pont

Mivel az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldala $x_1 < x_2$ miatt pozitív, ezért ekvivalens a bal és jobb oldal négyzetre emelésével nyert alábbi egyenlőtlenséggel:

$${x_2}^2 + x_2 - 2\sqrt{{x_2}^2{x_1}^2 + {x_2}^2x_1 + x_2{x_1}^2 + x_2x_1} + {x_1}^2 + x_1 > {x_2}^2 - 2x_2x_1 + {x_1}^2.$$

Rendezés után kapjuk:

$$x_2 + x_1 + 2x_1x_2 > 2\sqrt{{x_2}^2{x_1}^2 + {x_2}^2x_1 + x_2{x_1}^2 + x_2x_1}.$$

2 pont

Újra négyzetre emelhetünk, majd a kapott egyenlőtlenséget 0-ra rendezve

$${x_2}^2 + {x_1}^2 - 2x_1x_2 = (x_2 - x_1)^2 > 0 \tag{2}$$

adódik, ami $x_1 < x_2$ miatt mindig igaz. 1 pont

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk ezért (2)-ből visszafele következtetve beláttuk (1) igaz voltát. 1 pont

(b) A következő egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük:

$$n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2+n} < \frac{1}{2008}.$$

Átrendezve:

$$n + \frac{1003}{2008} < \sqrt{n^2+n}.$$

Mindkét oldal pozitív, négyzetre emeljük a bal és jobb oldalt:

$$n^2 + \frac{2006}{2008}n + \frac{1003^2}{2008^2} < n^2 + n,$$

amiből $\dfrac{1003^2}{4016} < n$. Mivel $\dfrac{1003^2}{4016} \approx 250,5$ ezért $n = 251$.

2 pont

Összesen: 7 pont.

2. megoldás: Az (a) rész eredményét megkaphatjuk gyöktelenítéssel is:

$$\frac{2x+1}{2}-\sqrt{x^2+x}=\frac{1}{2}\Big((2x+1)-\sqrt{4x^2+4x}\Big)\cdot\frac{(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x}}{(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x}}.$$ 2 pont

Az átalakítás után kapott alakban $(2x+1)$ szigorúan monoton növő függvény, ugyanígy $4x^2+4x$ és ennek négyzetgyöke is. Mivel szigorúan monoton növő függvények összege is szigorúan monoton növő, ezért $(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x}$ is az. Ennek reciproka, illetve $\frac{1}{2}$ -szerese pedig szigorúan monoton csökkenő függvény. 3 pont

3. megoldás: (Az (a) rész más módon.)
A függvény folytonos $x\geq 0$ és differenciálható $x>0$ esetén. 1 pont
A derivált függvény:

$$\left(\frac{2x+1}{2}-\sqrt{x^2+x}\right)'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1)=1-\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x^2+4x}}.$$ 2 pont

Ez valóban minden $x>0$ esetén értelmezett. Mivel $x>0$, ezért az utolsó gyökjel alatti tört értéke és így annak gyöke is 1-nél nagyobb, így a derivált negatív, minden $x>0$ esetén. Ebből következik, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő. 2 pont