Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait.

(1) $$x^3+y^3=x,$$

(2) $$3x^2y+3xy^2=y.$$

Megoldás: A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva kapjuk:

$$(x+y)^3=x+y.$$ 2 pont

Az egyenletet 0-ra rendezzük, majd szorzattá alakítjuk, így a következőt kapjuk:

$$(x+y)(x+y+1)(x+y-1)=0.$$

Ez alapján $x+y$ értéke lehet 1, 0 vagy -1. 2 pont

Ha $x+y=1$, akkor y helyébe $1-x$-et helyettesítünk az (1) egyenletbe

$$x^3+1-3x+3x^2-x^3=x, \quad \text{azaz} \quad 3x^2-4x+1=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6} \quad \text{innen} \quad x_1=1, \quad x_2=\frac{1}{3}.$$

Ha $x+y=0$, akkor y helyébe $-x$-et írva $x^3-x^3=x$, azaz $x_3=0$,
Ha $x+y=-1$, akkor y helyébe $-1-x$-et írva

$$x^3-(1+3x+3x^2+x^3)=x, \quad \text{azaz} \quad 3x^2+4x+1=0.$$

A megoldóképletből $x_4=-1$, $x_5=-\frac{1}{3}$.
Az $(x;y)$ megoldások tehát

$$(1;0), \quad \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), \quad (0;0) \quad (-1;0), \quad \left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$$

. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden jegye különböző.
(a) Hány ilyen szám van?
(b) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
(c) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a 2008-ik? (Az 1023 az első.)

Megoldás: (a) Jelölje a számot $\overline{xyzv}$. Balról jobbra sorba kiválasztjuk a jegyeket. Az ezresek helyén álló x nem lehet 0, a többi számjegy bármelyike lehet, tehát 9 lehetőségünk van. y bármi lehet, kivéve x, megint 9 lehetőségünk van. z csak 8 féle lehet, hiszen x és y már lefoglal egy-egy jegyet. Eddig három jegyet használtunk, így v 7 féle lehet. A megfelelő számok száma $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. 2 pont

(b) Ha az x helyén rögzítünk egy jegyet, a többi jegy a fentiek szerint $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ módon választható. Az x helyén az 1, 2, ..., 9 mindegyike ennyiszer szerepel, ezért a számok összegében az ezresek helyén álló jegyekből adódó rész $1000 \cdot (1+2+3+...+9) \cdot 504 = 22680000$.

Az y helyen rögzítve egy jegyet x 8 féle lehet, nem lehet 0 és y. Hasonlóan z 8 féle, v 7 féle lehet. Pontosan ugyanez igaz a tizes és egyes helyiértékre is, ezért innen az összeghez adódik

$$(100 + 10 + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 9) \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2237760.$$

A számok összege tehát 24917760. 3 pont

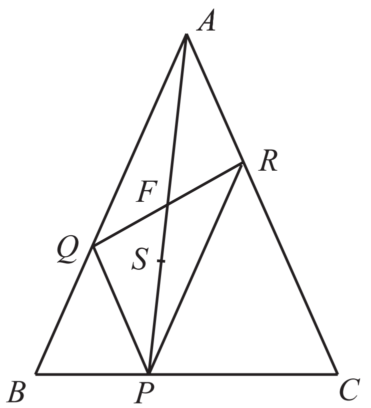
(c) Megmutatjuk, hogy a keresett szám a 4976. Már láttuk, hogy amennyiben x értéke rögzített, a többi jegyre $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ lehetőség van. A növekvő sorrendbe állított számok közül ezért az első 504 1-gyel kezdődik, a következő 504 2-vel, majd 3-mal és 4-gyel. Eddig ez $4 \cdot 504 = 2016$ szám, azaz a 2016. szám a lehető legnagyobb 4-gyel kezdődő, ami a 4987. Ha 498 a szám első három jegye, akkor az utolsó jegy 7 féle lehetet, ezért a legnagyobb 497-tel kezdődő szám a 2009. és ez a 4978. A nagyság szerinti sorrendben ezt megelőző szám a 4976. 2 pont

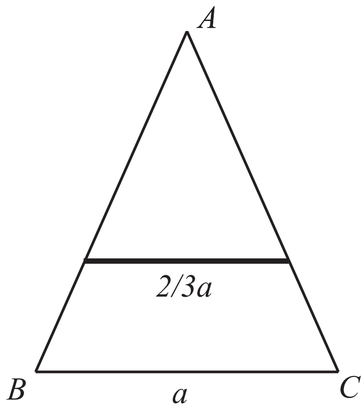
Összesen: 7 pont

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = AC$. BC egy tetszőleges belső P pontjából a szárakkal párhuzamosokat húzunk. Az AC-vel párhuzamos az AB-t Q-ban, az AB-vel párhuzamos az AC-t R-ben metszi. Határozzuk meg a PQR háromszögek súlypontjának halmazát, mértani helyét.

Megoldás: Az $AQPR$ négyszög paralelogramma. Ennek átlói felezik egymást. Így a PQR háromszög S súlypontja rajta van az AP átlón. 1 pont

Legyen QR felezőpontja F. Az S súlypontról tudjuk, hogy $PS : SF = 2 : 1$. 1 pont





Ebből következik, hogy $AS : AP = 4 : 6 = 2 : 3$. Ez azt jelenti, hogy az A középpontú $2 : 3$ arányú hasonlóság P-t S-be viszi át. Ez a hasonlóság BC belső pontjaihoz a háromszögben egy BC-vel párhuzamos $\frac{2}{3}a$ hosszúságú szakasz belső pontjait rendeli.

3 pont

Ez utóbbi szakasz minden pontja a keresett ponthalmaz (mértani hely) pontja, ugyanis az A középpontú $3 : 2$ arányú hasonlóság a kapott szakasz belső pontjaihoz a BC megfelelő pontját rendeli.

2 pont

Összesen: 7 pont

4. Adottak az A, B és C számok:

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \qquad B = \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right), \qquad C = \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám:

$$\sqrt{(A+B-C)n+2}.$$

Megoldás: A feladatban megadott A, B és C számokat más alakban írjuk fel.

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$B = (\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}})(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}) = 5-2\sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

$$(A+B-C)n+2 = (2+\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}-2+\sqrt{3})n+2 = 5n+2 \qquad 3 \text{ pont}$$

Amennyiben n pozitív egész, az $5n+2$ alakú szám utolsó jegye 2, vagy 7. A négyzetszámok végződése csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 lehet, tehát $5n+2$ alakú szám nem lehet négyzetszám.

2 pont

Ezek szerint $(A+B-C)n+2$ prímtényezői között van olyan q prím, amelynek kitevője a felbontásban páratlan. Tételezzük fel, hogy az általunk vizsgált szám racionális

$$\sqrt{(A+B-C)n+2} = \frac{m}{k}$$

ahol m és k pozitív egészek. A nevezővel beszorozva és négyzetreemelve

$$k^2\Big((A+B-C)n+2\Big) = m^2.$$

Mivel k^2-ben és m^2-ben q kitevője csak páros lehet, ezért a bal oldalon q kitevője páratlan, míg a jobb oldalon páros. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, feltevésünk nem lehet igaz, azaz $\sqrt{(A+B-C)n+2}$ irracionális.

2 pont

Összesen: 7 pont.

5. A pozitív valós p paraméter segítségével definiáljuk a valós számok halmazán az f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} p|x-4| - 4p & \text{ha } x \geq 0, \\ -p|x+4| + 4p & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

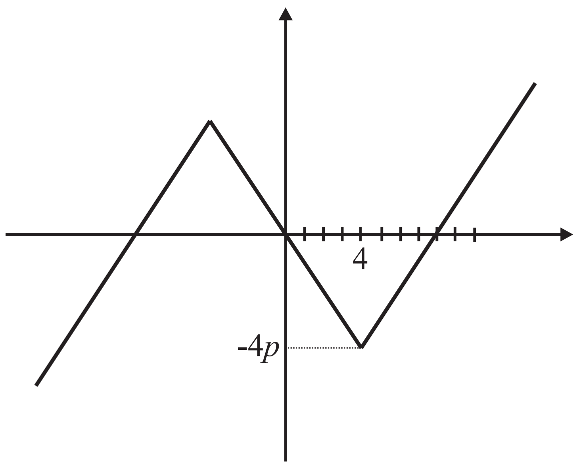
Határozzuk meg p értékét, ha tudjuk, hogy egyetlen olyan négyzet van, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján.

Megoldás: Tekintsük először $x \geq 0$ esetén a függvényt. Kövessük nyomon, milyen transzformációkkal juthatunk az $|x|$ függvényből a feladatban kitűzött $f(x)$-hez. $|x-4|$ azt jelenti, hogy a grafikont az x tengely pozitív iránya felé toljuk 4-gyel. Most megszorozzuk p-vel, ekkor a V alakú $|x-4|$ függvény félegyeneseinek meredeksége -1 és 1-ről $-p$-re illetve p-re változik, ez lesz $p|x-4|$. Végül levonunk $4p$-t, azaz a grafikont $4p$-vel letoljuk az y tengely negatív része felé. Éppen annyival toltuk le, hogy $f(0) = 0$ legyen.

Az f függvény páratlan, azaz $f(x) = -f(-x)$, ugyanis tekintve egy tetszőleges pozitív t és negatív $-t$ számnál a függvény definíciója szerint a helyettesítési értéket

$$p|t-4| - 4p = -\Big(-p|(-t)+4| + 4p\Big).$$

Így a grafikon -a meredekségeket meghatározó p értékétől függően- a következőképpen néz ki:

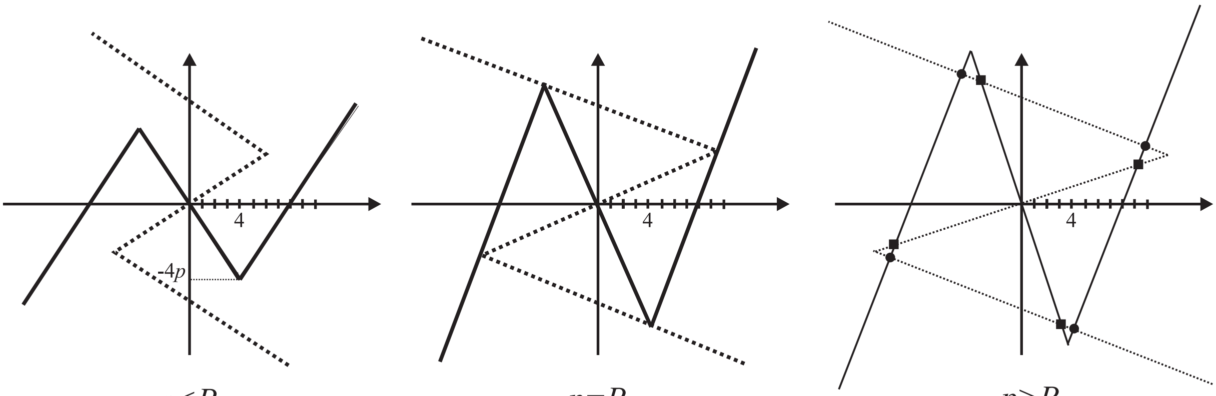


2 pont

Használjuk ki, hogy az f függvény páratlan, azaz grafikonja középpontosan tükrös az origóra. Amennyiben van olyan négyzet, amelynek minden csúcsa a grafikonon van, de a középpontja nem az origó, akkor ennek a négyzetnek az origóra vonatkozó tükörképe is a grafikonon lenne és így nem teljesülne a feladat feltétele. Tehát annak az egyetlen négyzetnek, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján éppen az origó a középpontja.

1 pont

A négyzet forgásszimmetrikus a középpontjára vonatkozó 90°-os forgatásra nézve. Forgassuk el ezért a grafikont is 90°-kal az origó körül. Ennek az elforgatott alakzatnak éppen négy közös pontja lehet f grafikonjával és ezek a négyzet csúcsai. A megfelelő p értéket P-vel jelöljük. Az eredeti és az elforgatott grafikont szemléltetjük, $0 < p < P$ esetén nincs közös pontjuk, $p = P$ esetén négy közös pont van, $P < p$ esetén 8 közös pont van és ennek megfelelően két négyzet. Ezek csúcsait az ábrán jelöltük. 2 pont



Most meghatározzuk P-t. $f(4) = -4p$, a grafikon lokális minimumpontjának koordinátái $(4; -4p)$. Ennek origó körüli 90°-os elforgatottja a $(4p; 4)$. Ennek rajta kell lenni a grafikonon, azaz a megfelelő P esetén $f(4P) = 4$ és $4P > 4$. Tehát $P|4P-4| - 4P = 4$, de $4P > 4$ miatt $|4P - 4| = 4P - 4$ és így $P(4P - 4) - 4P = 4$. Ennek megoldásai

$$P_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad P_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

A feladat szövege szerint p pozitív, így a paraméter egyetlen megfelelő értéke az $1+\sqrt{2}$.

2 pont

Összesen: 7 pont.